Mõõtmine ja Mõõtemääramatus

Matemaatilised põhialused

Mõõdis, mõõteväärtus

- **Mõõdis** y_{i} on üksikmõõtmisel saadud mõõteväärtus, näiteks mõõteriista näit ühekordsel lugemi võtmisel või ühe tiitrimise tulemus
- **Mõõteväärtuse** parimaks hinnanguks normaaljaotusele alluvate mõõdiste y_{i} puhul on enamasti nende mõõdiste aritmeetiline keskmine

Jaotusfunktsioonid

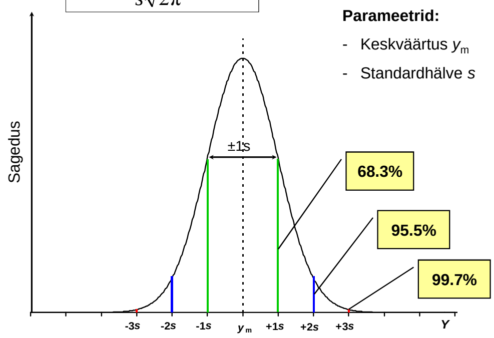
- Mõõteväärtused on matemaatilise statistika seisukohalt **juhuslikud suurused**
- **Juhuslikke suurusi** kirjeldavad jaotusfunktsioonid
- Olulisimad meile:
  - Normaaljaotus
  - Student'i jaotus (t-jaotus)
  - Ristkülikjaotus
  - Kolmnurkjaotus

Normaaljaotus

$$f(y) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-y_{\mathrm{m}})^2}{2s^2}}$$

Parameetrid:

- Keskväärtus y_{m}
- Standardhälve s



Standardhälve

- Normaaljaotusele alluvaid korduskatsete (mõõdiste) väärtusi y_{i} saab statistiliselt töödelda ja leida vastav **standardhälve** $s(y)$

$$s(y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_{\mathrm{m}})^2}{n-1}}$$

- Nimetatakse ka **eksperimentaalseks standardhälbeks**
  - On tõelise standardhälbe **hinnang**
- Seda nimetatakse vahel ka ruutkeskmiseks hälbeks

Aritmeetilise keskmise standardhälve

- Eelmisel slaidil oli mõõdise (üksikmõõtmise) standardhälve
- Mõõdiste **aritmeetilise keskmise standardhälve**:

$$s(y_{\mathrm{m}}) = \frac{s(y)}{\sqrt{n}}$$

Millal kasutada $s(y)$, millal $s(y_{\mathrm{m}})$?

Standardmääramatus

- Kui mõõtemääramatus on väljendatud standardhälbe kujul, siis nimetatakse seda **standardmääramatuseks**
- Tähistatakse $\boldsymbol{u(y)}$
- Standardmääramatus võrdub vastava standardhälbe absoluutväärtusega ja normaalajotusele alluvate suuruste korral väljendab määramatust 68% tõenäosusega
- Määramatuse arvutused käivad standard-määramatuse kaudu

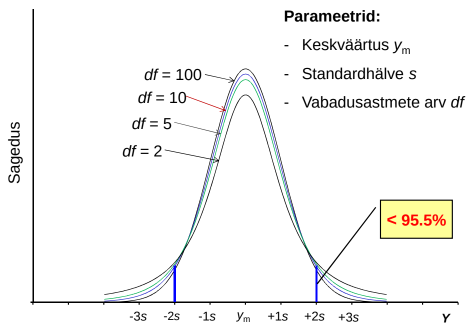
Liitstandardmääramatus

- Kui standardmääramatuse hinnang võtab arvesse kõiki mõõtmist oluliselt mõjutavad määramatuse allikaid
- siis sellist standardmääramatust nimetatakse **liitstandardmääramatuseks**
- Tähistatakse $u_c(y)$

Student'i ehk t-jaotus

- Kordusmõõtmiste käigus saadud normaaljaotusele alluvate mõõdiste aritmeetiline keskmine on samuti juhuslik suurus
- See suurus allub **Student'i ehk t-jaotusele**
- Sarnane normaaljaotusele, aga laiemate "sabadega"
  - Sabad on seda laiemad, mida vähem on kordusmõõtmisi
  - Kordusmõõtmiste arvu lähenedes lõpmatusele, läheneb t-jaotus normaaljaotusele
- **Suur osa mõõtetulemusi allub Normaal- ja t-segajaotusele**

Student'i jaotus



Laiendmääramatus

- Standardmääramatus väljendab (normaaljaotuse korral) määramatust 68% usaldusnivool
  - e. 68% kattetõenäosusega
  - See on enamasti liiga madal tõenäosus
- Saamaks kõrgemat kattetõenäosust ei anta tulemust enamasti standardmääramatusega vaid **laiendmääramatusega** $\boldsymbol{U}$
- Selle saamiseks korrutatakse u_c katteteguriga k

$$U = u_c \times k$$

Laiendmääramatuse kattetõenäosus

- Normaaljaotuse korral:
- $k = 2$ kattetõenäosus ca 95%
- $k = 3$ kattetõenäosus ca 99%
- Studenti hjaotuse või Studenti ja Normaaljaotuse konvolutsiooni korral on kattetõenäosus madalam

Absoluutne ja suhteline määramatus

- **Absoluutne määramatus** on määramatus, mis on esitatud samades ühikutes, mis mõõtesuurus

$$C_{\mathrm{benseen}} = (32 \pm 6)\ \mathrm{mg/kg},\ k = 2,\ \mathrm{norm}$$

- **Suhteline määramatus** on absoluutne määramatus jagatud mõõteväärtusega
  - Suhteline määramatus võib olla esitatud ühikuta suurusena või protsendina
  - Ülaltoodud näites vastavalt: 0.19 ja 19%

Määramatuse A ja B tüüpi hinnangud

- Eksperimentaalse standardhälbe kaudu väljendatud standardmääramatuse hinnangut nimetatakse standardmääramatuse **A-tüüpi hinnanguks**
- Kõiki selliseid määramatuse hinnanguid, milles *ei kasutata statistilisi meetodeid*, nimetatakse määramatuse **B-tüüpi hinnanguteks**
  - Standardlahuste kontsentratsioonid
  - Andmed seadmete passidest
  - Eksperthinnangud
- **Kahjuks on sageli info jaotuse kohta puudulik…**

Ristkülikjaotusega määramatus

- Nimetatakse ka **Ühtlane jaotus**
- See on mõistlik eeldada olukorras, kus määramatus on antud kujul

$$\pm a$$

- ja meil pole suuruse jaotuse kohta midagi teada
- Sel juhul:

$$u = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Kolmnurkjaotusega määramatus

- See on mõistlik eeldada olukorras, kus määramatus on antud kujul

$$\pm a$$

- ja meil on tõsine alus arvata, et väärtused jaotuse keskel on tõenäolisemad
- Sel juhul:

$$u = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

- Ristkülikjaotuse eeldamine on “ohutum” kui kolmnurkjaotuse eeldamine!

Korduvus (*repeatability*)

- **Samadel tingimustel** läbi viidud kordusmõõtmiste standardhälve iseloomustab mõõtmiste **korduvust s_r**
- Kui korduvus on ainsaks oluliseks määramatuse allikaks, siis võibki mõõtemääramatuse esitada kordusmõõtmiste standardhälbena
- **Enamasti see siiski nii ei ole!**

EVS 758:2009 ***Metroloogia. Terminid ja määratlused***

Korratavus (*reproducibility*)

- **Muudetud tingimustel** läbi viidud kordusmõõtmiste standardhälve iseloomustab mõõtmiste **korratavust**
- Muudetud võib olla:
  - Analüüsi tegija
  - Labor
  - **Analüüsi aeg** → **Laborisisene (pikaajaline) korratavus s_{RW}** ***Within-lab reproducibility*** ***Intermediate precision***
  - …
- See, mida on muudetud, tuleb korratavusele juurde märkida

Korratavus ja süstemaatilised efektid

- Korratavus erinevalt korduvusest võtab arvesse ka mõnesid süstemaatilisi efekte
- Näide:
  - Kui tiitrimisel iga päev valmistatakse uus titrant, siis päevasiseselt on titrandi kontsentratsiooni "viga" süstemaatiline efekt: nihutab kõiki tulemusi samasuunaliselt
  - Päevadevahelise korratavuse jaoks aga on tegemist juhusliku efektiga
    - seda muidugi juhul, kui erinevatel päevadel valmistatud titrandi kontsentratsioon kõigub juhuslikult

Korduvus < Laborisisene korratavus < liitstandardmääramatus

s_r < s_{Rw} < u_c

Korduvuse ja korratavuse pikaajaline hindamine

- Eriti kasulik on korduvust ja korratavust hinnata pika aja jooksul saadud andmetest
- Kaks moodust:

- **kontrollkaardi abil**
- **kogutud standardhälbe** abil
  - Olenevalt eksperimendi püstitusest, saab kogutud standardhälbe abil hinnata nii korduvust kui ka korratavust

Kogutud standardhälve

- Üldvalem:

$$s_{\text{kogutud}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^{\,2} + (n_2 - 1)s_2^{\,2} + \ldots + (n_k - 1)s_k^{\,2}}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k}}$$

- Tähistused:
  - k on gruppide arv
  - s_1, s_2 jne on vastavate gruppide standardhälbed
  - n_1, n_2 jne on vastavate gruppide paralleelmõõtmiste arvud

Kogutud standardhälve

- Juhul, kui mõõtmised on tehtud paljudel päevadel ning igal päeval on tehtud kaks paralleelmõõtmist, lihtsustub üldvalem selliseks:

$$s_{\text{kogutud}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_{i1} - x_{i2})^2}{2k}}$$

- Tähistused:
  - k on päevade arv
  - x_{i1} ja x_{i2} on i-nda päeva paralleelmõõtmiste tulemused

Otsemõõtmine

- Kui mõõteväärtuseks on mõõtevahendi näit (või näitude keskmine), siis räägitakse **otsemõõtmisest**
- Otsemõõtmine on näiteks lihtne kaalumine, kella vaatamine, …

Kaudmõõtmine

- Kui mõõtetulemus on saadud mitme **sisendsuuruse** väärtustest arvutuse teel, siis mõõtetulemust käsitatakse **väljundsuurusena**
- Sellist mõõtmist nimetatakse **kaudmõõtmiseks**

- Näide: Nitriti määramine fotomeetrilisel meetodil
- Sisendsuurused:
  - Kaalumisandmed
  - Lahuste kontsentratsioonid
  - Neelduvuse väärtused
  - …

Liitstandardmääramatuse leidmine

- Kui väljundsuurus avaldub:

$$Y = X_1 - X_2 + \ldots + X_n$$

- Siis:

$$u_c(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2 + \ldots + u(x_n)^2}$$

- Sisendsuuruste määramatused tuleb teisendada standardmääramatusteks!

Liitstandardmääramatuse leidmine

- Kui väljundsuurus avaldub:

$$Y = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4}$$

- Siis:

$$u_c(y) = y \cdot \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{u(x_4)}{x_4}\right)^2}$$

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{u(x_3)}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{u(x_4)}{x_4}\right)^2}$$

Liitstandardmääramatuse leidmine

- Üldjuhul:

$$Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- Siis:

$$u_C(y) = \sqrt{\left[\frac{\partial Y}{\partial X_1} u(x_1)\right]^2 + \left[\frac{\partial Y}{\partial X_2} u(x_2)\right]^2 + \ldots\ldots + \left[\frac{\partial Y}{\partial X_n} u(x_n)\right]^2}$$

Liitstandardmääramatuse leidmine

- Oluline märkus: eelmiste slaidide valemid kehtivad vaid mittekorreleeruvate sisendsuuruste korral!

Mõõtetulemuse esitamine

- Mõõtetulemuse võib esitada
  - Mõõteväärtus ja liitstandardmääramatus
  - Mõõteväärtus ja laiendmääramatus
  - Vahemik, milles asub tõeline väärtus teatud tõenäosusega

Mõõtetulemus

- Mõõtetulemuse esitus:

Kütuse benseenisisaldus on
$C_{\text{benseen}} = (32 \pm 6)$ mg/kg, $k = 2$, norm.

- Kujutab endast **mõõtetulemuse** esitust ja tähendab järgmist:

- Benseeni tõeline sisaldus uuritud kütuses asub vahemikus 26 … 38 mg/kg tõenäosusega 95%

EVS 758:1998 *Metroloogia. Terminid ja määratlused*

Tulemuse jaotus

- Millal võime eeldada normaaljaotust?
- Peavad olema täidetud tingimused:
  - 1. Mudelis pole olulisi mittelineaarsusi
  - 2. Kehtib üks järgnevast:
    - On üks põhiline määramatuse allikas, mille kohta on teada, et ta allub normaaljaotusele ja tema vabadusastmete arv on üle 30
    - On vähemalt kolm võrreldava kaaluga põhilist määramatuse allikat

Tulemuse jaotus

- Kui tulemus ei allu normaaljaotusele, siis on põhjuseks enamasti vabadusastmete ebapiisav arv
- Sel juhul ei vasta $k = 2$ tase 95% usaldusnivoole
- Selleks, et saada 95% usaldusnivood, on vaja standardmääramatust korrutada vastava *t*-koefitsiendiga
  - Leitud vastavalt konkreetse tulemuse nn "efektiivsele vabadusastmete arvule"
- Lihtsalt "$k = 2$" tasemel võib tulemust alati esitada

Efektiivne vabadusastmete arv

- Welch-Satterthwaite võrrand

$$\nu_{eff}(y) = \frac{u_C(y)^4}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left[\frac{\partial Y}{\partial X_i} u(x_i)\right]^4}{\nu_i}}$$

Määramatuse komponent

- Võimaldab leida väljundsuuruse efektiivse vabadusastmete arvu kasutades sisendsuuruste vabadusastmete arve
  - Lähendusmeetod
  - B tüüpi suuruste jaoks on ν leidmine kohati subjektiivne

Mille kohta tulemus kehtib?

- Tulemus võib olla esitatud:
  - Vaid laboratoorse proovi kohta (tsisternist võetud pudelitäis vedelikku, põllult võetud mullaproov)
  - Üldkogumi kohta (kogu tsisterni vedelik, kogu muld antud põllult)
- Esimesel juhul proovi mitte-esinduslikkusest tulenev määramatus arvesse ei lähe
- Teisel juhul läheb ka proovi mitte-esinduslikkusest tulenev määramatus arvesse