

Tartu Ülikool
Keskkonnanfüüsika instituut

JAOTUSFUNKTSIOONID JA MÕÕTEMÄÄRAMATUSED

II VIHIK

LOENGIKONSPEKT

Rein Rõõm

TARTU 2005

SISUKORD

3. JUHUSLIKU SUURUSE ARVKARAKTERISTIKUD.....	3
3.1. Keskväärtus	3
3.2. Dispersioon ja ruuthälve	6
3.3. Juhusliku suuruse momendid.....	11
3.4. Ühtlase jaotuse keskväärtus ja dispersioon	12
3.5. Eksponentjaotuse keskväärtus ja dispersioon.....	13
3.6. Normaalsootuse keskväärtus ja dispersioon.....	15
3.7. Keskväärtuse hindamine mõõtmistulemustest.....	18
3.8. Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest.....	21
3.9. Ühetaoliselt jaotunud suuruste summa keskväärtus ja dispersioon.....	22
4. JUHUSLIKUD VEKTORID	26
4.1. Juhusliku vektori mõiste	26
4.2. Kahemõõtmelised diskreetsed juhuslikud vektorid.....	26
4.3. Kahemõõtmeline pidev juhuslik vektor.....	28
4.4. Juhusliku kahemõõtmelise vektori keskväärtus	31
4.5. Kovariatsioonimaatriks.....	33
5. MÕÕTEMÄÄRAMATUS FÜÜSIKALISTEL MÕÕTMISTEL	37
5.1. Füüsikalised suurused ja nende mõõtmine	37
5.1.1. Rahvusvaheline mõõtühikute süsteem.....	38
5.1.2. CGS süsteem.....	39
5.1.3. Kordsed mõõtühikud	40
5.1.4. Tuletatud ühikud.....	40
5.1.5. Dimensioonivalem.....	41
5.1.6. Tõenäosustiheduse dimensioon	42
5.1.7. Meetermõõdustiku ajaloost.....	42
5.2. Mõõtevead ja mõõtemääramatus	44
5.2.1. Süstemaatilised vead.....	44
5.2.2. Juhuslikud vead. Mõõdetava suuruse statistiline hinnang.....	45
5.2.3. Mõõtemääramatus	46
5.2.4. A-tüüpi mõõtemääramatus	47
5.2.5. B-tüüpi mõõtemääramatus.....	50
5.2.6. Liitmääramatus	51
5.3. Tähenumbrite hulk määramatuse arvutamisel.....	53
5.4. Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine.....	54
5.5. Mõõtmistulemuse mõõtemääramatus mitme sisendsuuruse korral	57
5.6. Halvima olukorra meetod	65
5.7. Kaalutud keskmiste meetod.....	66
5.8. Mõõtmistulemuste graafiline töötlemine. Vähimruutude meetod.....	67
6. ÖPPEKIRJANDUST.....	72
Lisa 1. Studenti t-kordaja.....	73
Lisa 2. Vihtide lubatud vead.....	74

3. JUHUSLIKU SUURUSE ARVKARAKTERISTIKUD

Eespool nägime, et juhusliku suuruse jaotusseadus iseloomustab täielikult juhuslikku suurust tõenäosuslikult vaatekohalt. Jaotusseadus võimaldab leida juhusliku suurusega seotud iga sündmuse tõenäosust. Jaotusseaduse põhikujudeks on teatavasti jaotustabel diskreetse juhusliku suuruse puhul ja jaotusfunktsioon (jaotustihedus) pideva juhusliku suuruse korral.

Nagu nägime alapunktis 2.9 (Tõenäosustiheduse hindamine eksperimendist), on pideva suuruse korral jaotustiheduse eksperimentaalne leidmine sageli väga kulukas ja töömahukas ülesanne. Enamasti aga ei olegi jaotusseadust tarvis teada (ei ole tarvis nii täielikku infot). Piisab, kui kasutada nn juhusliku suuruse **arvkarakteristikuid**, mis iseloomustavad juhusliku suuruse integraalseid omadusi. Ilma liialdamata võib öelda, et tõenäosusteooria rakendamisel praktiliste ülesannete lahendamiseks on oluline osata kasutada juhusliku suuruse arvkarakteristikuid, jättes kõrvale jaotusseadused.

Olulisemateks arvkarakteristikuteks on **keskväärtus** ja **dispersioon**. Peale nende põhikarakteristikute kasutatakse veel suurt hulka teisi arvkarakteristikuid nagu *kvantiilid*, *mediaan*, *mood*, *momendid*, *asümmeetriakordaja*, *ekstsessikordaja*, *karakteristlik funktsioon*, *entroopia jmt*. Käesolevas peatükis vaatleme keskväärtuse ning dispersiooni arvutamist ja eksperimentaalset määramist.

3.1. Keskväärtus

Keskväärtus on juhusliku suuruse tähtsaim **arvkarakteristik**, mis iseloomustab juhusliku suuruse paiknemist.

Juhusliku suuruse X keskväärtust tähistatakse matemaatikas ja füüsikas üsna mitmel erineval viisil. Levinumad tähistused on

$$m, \quad m_x, \quad m[x], \quad \bar{x}, \quad \langle x \rangle \quad - \text{füüsikute hulgas};$$

$$\mathbf{E}X, \quad M[X] \quad , \quad - \text{matemaatikute hulgas}.$$

Siin tähis m , M on võetud ingliskeelse sõna *mean* (keskmine) esitähdest, \mathbf{E} aga on tulenenud prantsuskeelse sõna *espérance* (lootus, ootus) esitähdest.

Käesolevas kursuses **kasutame** enamasti **tähist**

$$m$$

ja kui tahame eriliselt rõhutada või esile tuua juhuslikku suurust, mille keskmisega on tegemist, siis kasutame tähist

$$m[X].$$

Tähise

$$\bar{x}$$

reserveerime aritmeetilisele keskmisele.

Diskreetse juhusliku suuruse $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ **keskväärtuseks** nimetatakse suurust (arvu)

$$m = \sum_{k=1}^n x_k p_k, \quad (1.1)$$

kus $p_k = P(X = x_k)$.

Kui võimalike väärtuste hulk on loenduv, siis

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \quad (1.2)$$

kusjuures eeldatakse, et summa paremal koondub (on lõplik). Kui summa ei koonu, siis harilikult keskväärtust juhuslikule suurusele ei omistata.

Pideva juhusliku suuruse X , mille jaotustihedus on $f(x)$ ja võimalike väärtuste hulk on kogu reaaltelg, **keskväärtuseks** nimetatakse arvu

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (1.3)$$

eeldusel, et integraal eksisteerib (koondub absoluutselt).

Kui võimalike väärtuste hulgaks on lõik $[a, b]$, siis

$$m = \int_a^b x f(x) dx. \quad (1.4)$$

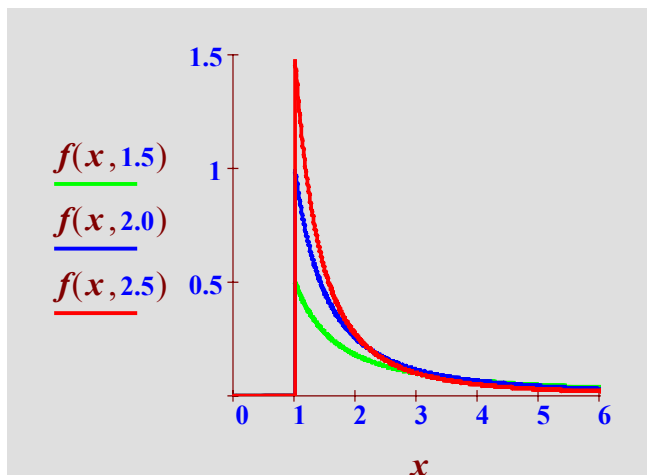
Märkus. Valemid keskväärtuse arvutamiseks langevad kokku valemitega varda massikeskme arvutamiseks, kui varda mass on võrdne ühega. Teisisõnu, keskväärtus on ühikmassiga varda staatiline moment.

Näide. Astmejaotuse keskväärtus.

Astmejaotus on

$$f(x; r) = \begin{cases} \frac{r-1}{x^r}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases} \quad (1.5)$$

konstant $r - 1$ lugejas arvestab normeerimist (f integraal x järgi rajades $[1, \infty)$ olgu võrdne ühega). On näha: selleks, et jaotus oleks positiivne, peab kehtima $r > 1$. Astmejaotuse graafik on toodud erinevate parameetri r väärtuste korral joonisel 1.1.



Joonis 1.1

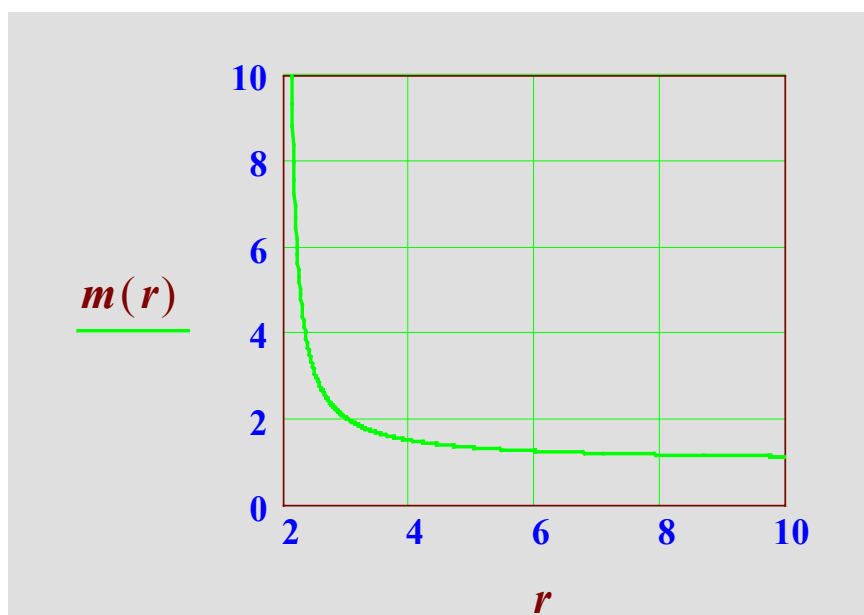
Arvutame astmejaotuse keskvaartuse

$$m = \int_1^{\infty} x f(x, r) dx = (r-1) \int_1^{\infty} x^{1-r} dx = \frac{r-1}{2-r} \left(\frac{1}{x^{r-2}} \right)_1^{\infty}.$$

Näeme, et keskvaartuse eksisteerimiseks on tarvilik tingimuse $r-2 > 0$ ehk $r > 2$ kehtimine – vastasel juhul ei koonduks ümarsulgudes olev avaldis lõpmatuses nulliks, vaid oleks lõpmata suur. Kui see tingimus on täidetud, siis saame

$$m = \frac{r-1}{r-2}, \quad r > 2. \quad (1.6)$$

Seega, keskvaartus on alati suurem ühest (pole ka midagi imestada, kuna kogu jaotuse kandja asub punktist üks paremal) ja kasvab piiramatult kui r läheneb ühele paremalt (joonis 1.2).



Joonis 1.2

Oluline asi, millele selle näitega tähelepanu juhime, on asjaolu, et lõpmatusse ulatuva kandjaga (sama kehtib miinuslõpmatusse puhul) juhuslikul suurusel ei pruugi keskvärtus eksisteerida. Selle (keskväärtuse) olemasoluks on vajalik, et jaotustihedus läheneks nullile piisavalt kiiresti, kui $x \rightarrow \pm \infty$. Lõpliku kandja puhul sellist probleemi ei teki.

Keskvärtuse omadusi.

Näitame mõned olulisemad keskvärtuse omadused, mis kehtivad nii diskreetse kui pideva juhusliku suuruse korral.

1. Konstandi keskvärtus. Konstandi keskvärtus on see konstant ise

$$m[c] = c.$$

2. Homogeensus. Konstandi võib tuua keskvärtuse sümboli ette

$$m[cX] = cm[X].$$

Tõestatakse see pideval juhul nii

$$m[cX] = \int_{-\infty}^{+\infty} cx f(x) dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = c m[X].$$

Analoogiline on tõestus diskreetse juhusliku suuruse korral.

3.2. Dispersioon ja ruuthälve

Teades juhusliku suuruse keskvärtust, ei saa veel otsustada, milliseid väärtusi juhuslik suurus võib omandada ja kuidas nad on hajutatud keskvärtuse ümber. Kui jaotusfunktsioon on hästi kitsas, kui juhusliku suuruse hajuvus on väike, siis on keskvärtusest küll, et iseloomustada juhuslikku suurust. Kui aga jaotusfunktsioon on lai ja lame? Meil on tarvis suurust, mis võimaldaks kvantitatiivselt hinnata jaotuse „kitsust“ või „hajuvust“. Selliseks suuruseks on **dispersioon**.

Dispersiooni defineerimiseks toome esmalt sisse juhusliku suuruse **hälbe** ehk **tsentreeritud juhusliku suuruse**

$$\overset{\circ}{X} = X - m[X]. \tag{2.1}$$

Pole raske veenduda, et hälbe keskvärtus on võrdne nulliga. Tõepoolest

$$m\left[\overset{\circ}{X}\right] = m[X - m[X]] = m[X] - m[m[X]] = m[X] - m[X] = 0$$

See on seletatav sellega, et võimalikud hälbed on erinevate märkidega ja summaarselt kompenseeruvad. Järelikult ei iseloomusta hälve hajuvust. Tsentreerimine tähendab geomeetriliselt seda, et koordinaatide alguspunkt viiakse punkti $m[X]$.

Dispersioon

Juhusliku suuruse **dispersiooniks** (inglisekeelne nimetus *variance*) nimetatakse suurust

$$D \equiv D[X] = m\left[X^2\right] = m\left[(X - m[X])^2\right], \quad (2.2)$$

mis võetakse üheks hajuvuse karakteristikuks. Seega on dispersioon juhusliku suuruse üheks nn *juhuslikkuse määra* iseloomustajaks.

Teised levinumad tähised dispersioonile on veel σ^2 (dispersioon on siin tähistatud kui ruuthälbe ruut). Käesolevas kursuses **kasutame dispersioonile tähist**

$$D$$

ja kui tahame rõhutada või esile tuua, millise juhusliku suurusega on tegu, siis tähist

$$D[X].$$

Vastavalt definitsioonile (2.2) on diskreetse juhusliku suuruse dispersiooni arvutusvalem

$$D = \sum_i (x_i - m)^2 p_i. \quad (2.3)$$

Niisiis, tegu on tõenäosustega kaalutud üksikrealisatsioonide hälvete ruutude summaga. Analoogiliselt, pideva juhusliku suuruse korral annab (2.2)

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx. \quad (2.4)$$

Dispersiooni praktiliseks arvutamiseks sobib kasutada järgmist **Steineri valemit**

$$D[X] = m[X^2] - (m[X])^2$$

ehk lühemalt

$$D = m[X^2] - m^2. \quad (2.5)$$

Siin esimene suurus paremal on keskvärtus juhusliku suuruse ruudust X^2 . Kõige lihtsam on seda valemit tõestada, esitades valemis (2.3) ja/või (2.4) ruutavaldisel ümarsulgudes kujul $(x - m)^2 = x^2 - 2xm + m^2$. Vaatame detailsemalt (2.5) tõestust pideva juhusliku suuruse juhul (2.4)

$$\begin{aligned} D &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xm + m^2) f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2m \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + m^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

Siin teine integraal on X keskvaartus m ja viimane integraal on normeerituse tõttu võrdne ühega. Seepärast saame

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2m^2 + m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m^2,$$

mis ongi valem (2.5). Ühtlasi oleme ka saanud ilmutatud esituse juhusliku suuruse ruudu keskvaartuse arvutamiseks:

$$m[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (2.6)$$

Näide. Astmejaotuse dispersioon.

Olgu jaotusfunktsiooniks astmejaotus (1.5). Dispersiooni arvutuseks kasutame valemit (2.5).

Keskvaartus m on teada valemist (1.6), seega on vaja leida $m[X^2]$, kasutades selleks seost (2.6) ja jaotusfunktsiooni (1.5):

$$m[X^2] = \int_1^{\infty} x^2 \frac{r-1}{x^r} dx = (r-1) \int_1^{\infty} x^{2-r} dx = \frac{r-1}{3-r} \left(\frac{1}{x^{r-3}} \right)_1^{\infty}.$$

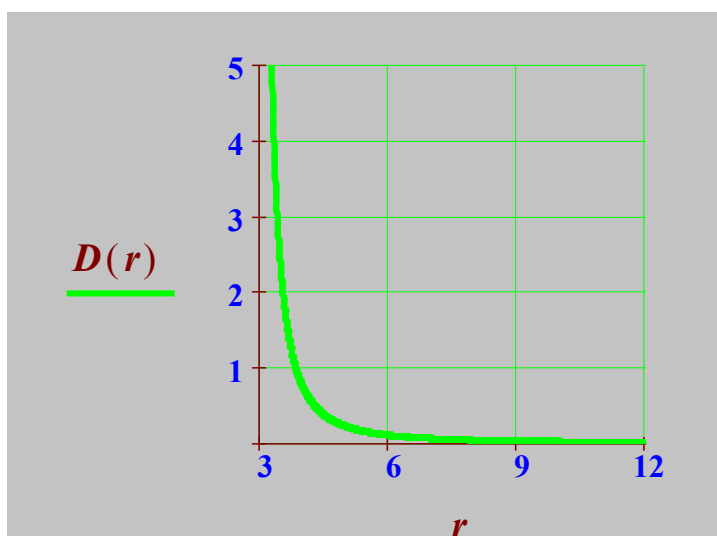
Siin ümarsulg annab lõpliku tulemuse vaid siis, kui on täidetud tingimus $r > 3$. Sel juhul annab ümarsulg ülemise raja juures nulli ning saame lõplikult

$$m[X^2] = \frac{r-1}{r-3}.$$

Seega saame dispersiooni jaoks

$$D \equiv D(r) = \frac{r-1}{r-3} - \left(\frac{r-1}{r-2} \right)^2 = \frac{r-1}{(r-3)(r-2)^2}.$$

Selle dispersiooni graafik parameetri r funktsioonina on toodud joonisel 2.1.



Joonis 2.1

Näeme, et dispersioon läheneb kiiresti lõpmatusele, kui parameeter r läheneb kolmele. Ja vastupidi, parameetri kasvades dispersioon läheneb kiiresti nullile.

See näide demonstreerib seda tõsiasja, et – sarnaselt keskväärtusele – vajab lõpmatu määramispiirkonnaga juhuslik suurus dispersiooni lõplikkuseks (st eksisteerimiseks) küllalt kiiret tõenäosustiheduse nullile lähenemist protsessis $x \rightarrow \pm\infty$. Jaotusfunktsiooni nullile lähenemise kiiruse määrab käesolevas näites parameeter r – mida suurem see on, seda kiirem on $f(x)$ nullile lähenemine (vt joonis 1.1). Nagu näeme, on dispersiooni eksisteerimiseks tarvilik suurem nullile lähenemise kiirus ($r > 3$) kui oli tarvilik keskväärtuse olemasoluks (seal oli tarvilik $r > 2$). See tulemus on üsna üldine: lõpmatu kandjaga jaotusfunktsiooni korral on tingimused dispersiooni eksisteerimiseks hoopis karmimad kui keskväärtusele.

Dispersiooni omadusi

Vaatleme dispersiooni põhiomadusi, mis kehtivad nii diskreetse kui pideva juhusliku suuruse puhul.

1. Dispersiooni mittenegatiivsus.

a) **Mittejuhusliku suuruse dispersioon on null.** Konstandi dispersioon on võrdne nulliga

$$D[c] = 0.$$

Tõestuseks teisendame

$$D[c] = m[(c - m[c])^2] = m[0] = 0.$$

b) Juhusliku suuruse dispersioon on alati positiivne.

Vaatame määranguid (2.3) ja (2.4). Diskreetsel juhul (2.3) on summa all ainult positiivsed suurused, ja positiivsete suuruste summa on positiivne.

Erandjuhaks on mittejuhuslik diskreetne suurus, mil summa koosneb vaid ühest liikmest, mis on parasjagu null.

Analoogiline on tõestus pideval juhul (2.4): integraal positiivsest funktsioonist on positiivne.

Ka siin on piiril erijuhaks ühteainsasse punkti $X = c$ lokaliseeritud jaotus, mida kirjeldab delta-funktsioon

$$f(x) = \delta(x - c).$$

2. Ruuthomogeensus. Kehtib võrdus

$$D[cX] = c^2 D[X].$$

Keskväärtuse omaduste põhjal

$$\begin{aligned} D[cX] &= m[(cX - m[(cX)])^2] = m[(cX - cm[X])^2] = \\ &= m[c^2(X - m[X])^2] = c^2 D[X] \end{aligned}$$

3. Sõltumatute juhuslike suuruste summa dispersioon.

Kui suurused X ja Y on sõltumatud juhuslikud suurused, siis

$$D[X \pm Y] = D[X] + D[Y].$$

Tõestuseks teisendame, kasutades keskvärtuse aditiivsuse omadust

$$\begin{aligned} D[X \pm Y] &= m[(X \pm Y - m[X \pm Y])^2] = m[(\overset{\circ}{X} \pm \overset{\circ}{Y})^2] = \\ &= m[X^2 \pm 2\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y} + Y^2] = D[X] + D[Y], \end{aligned}$$

sest

$$m[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = m[\overset{\circ}{X}] \cdot m[\overset{\circ}{Y}] = 0.$$

Erijuhul

$$D[X + c] = D[X].$$

Standardhälve (ruutkeskmise hälve).

Dispersiooni ruutjuurt

$$\sigma = \sqrt{D} \quad (2.7)$$

nimetatakse **standardhälbeks**, **ruutkeskmiseks hälbeks** ehk **ruuthälbeks**.

Standardhälbe üldlevinud tähis on: σ

Definitsioonidest on näha, et dispersiooni dimensioon on võrdne juhusliku suuruse dimensiooni (mõõtühiku) ruuduga, standardhälbe dimensiooniks on aga juhusliku suuruse dimensioon. Seetõttu kasutatakse praktikas harilikult standardhälvet.

Analoogiliselt dispersiooni omadustega saame kirjutada ka standardhälbe omadused.

Siin märgime ainult ühe omaduse:

$$\sigma(cX) = |c|\sigma(X).$$

Teades juhusliku suuruse X keskvärtust m ja standardhälvet σ , saame ettekujutuse suuruse X võimalike väärtuste paiknemise piirkonnast.

3.3. Juhusliku suuruse momendid

See on esmatutvus momentidega ja siin me anname vaid definitsioonid.

Keskmistamine, keskmistusoperatsioon. Olgu meil antud suvaline (mittejuhuslik!) juhusliku suuruse funktsioon $\Phi(X)$. See tähendab seda, et kui juhuslik suurus omandab väärtuse $X = x$, siis Φ omandab väärtuse $\Phi(x)$. Juhusliku suuruse näitena olgu siinkohal nimetatud

Astmefunktsioon X^q ;
 Eksponentfunktsioon e^X ;
 Koosiinusfunktsioon $\cos X$;
 jne.

Φ ei ole juhuslik funktsioon. See tähendab seda, et samale argumenti väärtusele $X = x$ vastab alati üks ja seesama funktsiooniväärtus $\Phi(x)$. Samal ajal on tegu juhusliku suurusega selles mõttes, et argument on juhuslik suurus ja seetõttu on ka katsetel saadavad Φ väärtused lõppkokkuvõttes juhuslikud. Omab mõtet arvutada selle funktsiooni **keskväärtus** ehk **matemaatiline ootus**, mille defineerime diskreetse juhusliku suuruse korral valemiga

$$m[\Phi(X)] = \sum_i p_i \Phi(x_i)$$

ja pideva juhusliku suuruse korral valemiga

$$m[\Phi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) f(x) dx.$$

Tähtsaimad juhusliku suuruse funktsioonid, mida kõige enam keskmistatult kasutatakse, on juhusliku suuruse astmed (astmefunktsioonid), mida nimetatakse momentideks. Eristatakse **tsentreerimata** ja **tsentreeritud momente**.

Juhusliku suuruse **k-ndat järku tsentreerimata momendiks** e **algmomendiks** nimetatakse juhusliku suuruse k-nda astme keskväärtust

$$\mu_k = m[X^k].$$

Juhusliku suuruse **k-ndat järku tsentreeritud momendiks** nimetatakse juhusliku suuruse tsentreeritud k-nda astme keskväärtust

$$\mu_k^0 = m \left[X^k \right] = m \left[(X - m[X])^k \right].$$

Eespool vaadeldud suurustest on :

Jaotusfunktsiooni norm – nullindat järku algmoment
Keskväärtus – esimest järku algmoment
Dispersioon – teist järku tsentreeritud moment

Käesolevas kursuses piirdumegi nende kolme momendiga. Nimetame siinkohal siiski, et enamkasutatavad lisaks kolmele eelnimetatule on veel kolmandat ja neljandat järku tsentreeritud momendid, millega on seotud suurused *asümmeetria* (iseloomustab jaotuse ebasümmeetrilisust) ning *ekstsess* (iseloomustab jaotusefunktsiooni vertikaalset väljavenitatust).

3.4. Ühtlase jaotuse keskväärtus ja dispersioon

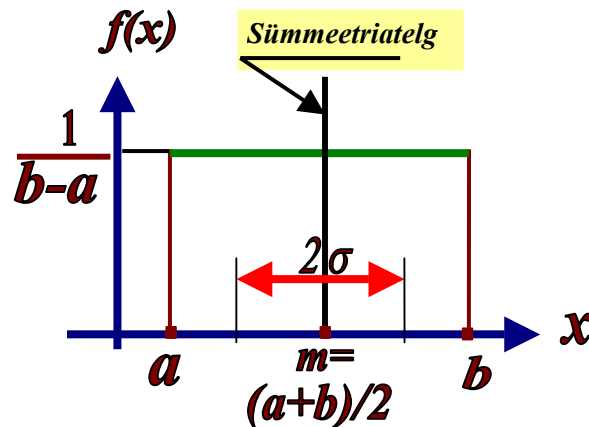
Lõigul $[a, b]$ ühtlase jaotuse (punkt 2.5) jaotusfunktsioon on

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

Pannes selle **keskväärtuse** arvutusvalemisse (1.4), saame

$$m = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^2}{2} \right)_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

See on lõigu $[a, b]$ keskpunkt. Et tegemist on lõigu keskpunkti suhtes sümmeetrilise jaotusega (joonis 4.1), siis on ka loomulik, et keskväärtus ühtib sümmeetriakeskme asukohaga.



Joonis 4.1

Dispersiooni arvutamisel kasutame Steineri valemit (2.5). Leiame esmalt teist järku algmomendi

$$\begin{aligned} m[X^2] &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right)_a^b = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{aligned}$$

Nüüd saame

$$D = m[X^2] - m^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Standardhälbe tuleb siit

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2} \approx 0.577 \frac{b-a}{2}.$$

Standardhälbe ulatus (s.o intervalli $[m - \sigma, m + \sigma]$ ulatus) on näidatud joonisel 4.1 kahepoolse noolega. Standardhälbe väärtusest on ka näha, et kahekordsele standardhälbele vastav intervall $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ sisaldaks eneses juba kogu juhusliku suuruse muutumispiirkonna $[a, b]$. Teiste sõnadega, andes hajuvuspiirkonnana pluss-miinus kaks standardhälvet keskväärtusest, saavutame, et juhuslik suurus satub sellesse piirkonda tõenäosusega 1 (eeldusel, et jaotus ikka on ühtlane!).

3.5. Eksponentjaotuse keskväärtus ja dispersioon

Eksponentjaotus (vt punkt 2.6) on antud valemiga

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Siin on otstarbekas arvutada esmalt suvaline algmoment ja seda kasutada keskväärtuse ja dispersiooni leidmiseks. Me saame k -nda algmomendi jaoks vastavalt punkti 3.3 definitsioonile

$$\mu^k = m[X^k] = \int_0^{\infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx.$$

Rakendame integraali arvutamisel parameetri järgi diferentseerimise võtet:

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-\lambda x} dx = \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx.$$

Kuna viimase integraali väärtus on

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

siis saame

$$\mu^k = \lambda \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-\frac{d}{d\lambda}\right)^k \frac{1}{\lambda}.$$

Võttes siin $k = 0, 1$ ja 2 , saame kerge vaevaga

$$\mu^0 = 1 \quad (\text{Normeering ühele on kehtiv nagu peabki olema!})$$

$$\mu^1 = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mu^2 = \frac{2}{\lambda^2}.$$

[Kerge on saada ka üldavaldist $\mu^k = \frac{k!}{\lambda^k}$, aga seda ei lähe meil selle kursuse jooksul vaja.]

Seega, eksponentjaotuse keskvärtus on

$$m = \mu^1 = \frac{1}{\lambda}$$

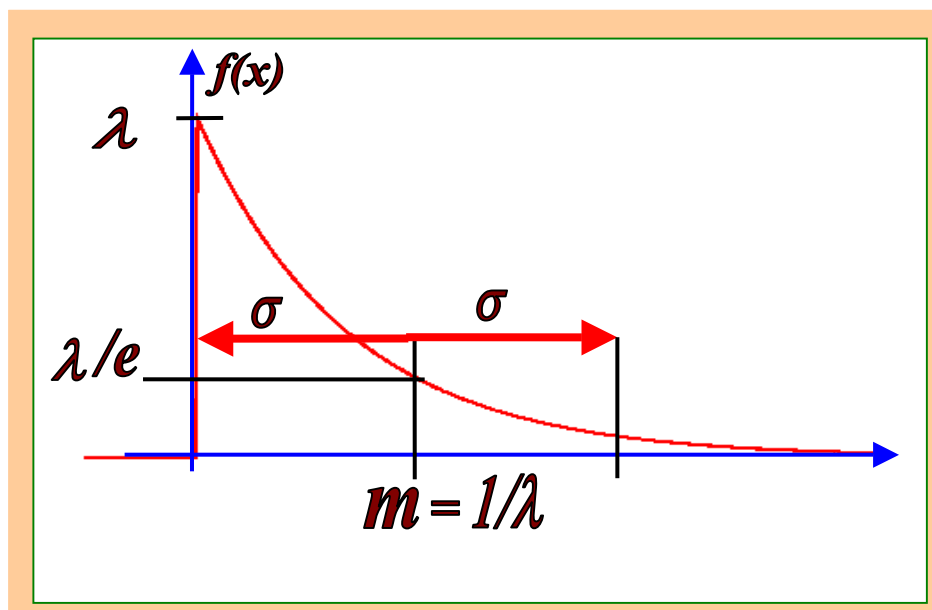
ja dispersioon on

$$D = \mu^2 - m^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Standardhälbe jaoks saame siit

$$\sigma = \sqrt{D} = \frac{1}{\lambda}.$$

Niisiis, eksponentjaotuse korral on keskvärtus ja standardhälve arvuliselt võrdsed. Joonisel 5.1 on näidatud eksponentjaotuse keskvärtus ja ruuthälve, kui jaotusfunktsioon on skaleeritud λ ühikutes ja x -telg $1/\lambda$ ühikutes.



Joonis 5.1

3.6. Normaaljaotuse keskväärtus ja dispersioon

Normaaljaotuse e Gaussi jaotuse defineerisime punktis 2.7 valemiga:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (6.1)$$

kus a ja σ olid etteantud parameetrid. Osutub, **parameeter a on normaaljaotuse keskväärtus** ning **σ on normaaljaotuse standardhälve**:

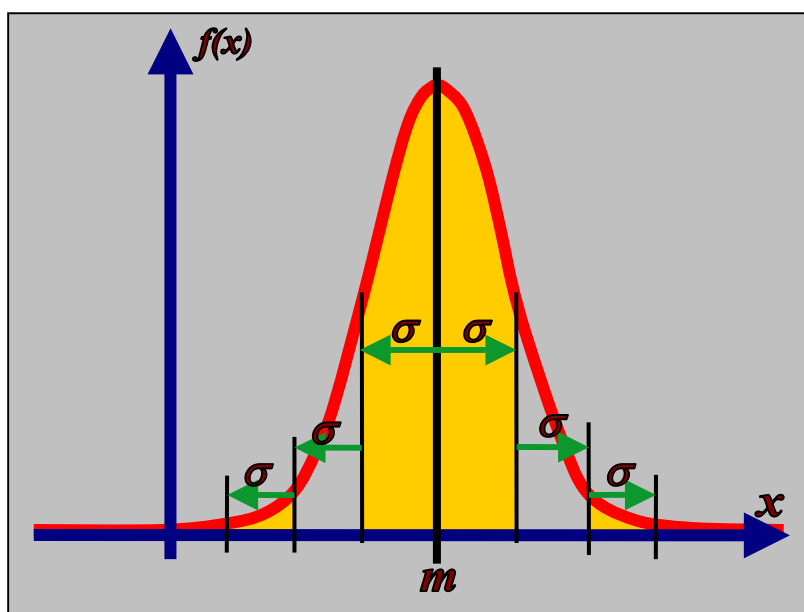
$$m = a, \quad (6.2)$$

$$D = \sigma^2. \quad (6.3)$$

Nii et tegemist on jaotusfunktsiooniga, mille põhiparameetrid avalduvad tema esimese kahe momendi kaudu. Me võime valemite (6.2) ja (6.3) kasutades esitada normaaljaotuse ka kujul

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2D}\right).$$

Veendume valemite (6.2) ja (6.3) paikapidavuses.



Joonis 6.1

Keskväärtuse võrdumine a -ga järeldub tegelikult juba asjaolust, et jaotusfunktsioon (6.1) on sümmeetriline punkti a suhtes (joonis 6.1, vt ka punkt 2.7, joonised 7.1–7.3). Lihtne on (6.2) kehtivust näidata ka keskväärtuse definitsioonist (1.3) lähtudes:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (y+a) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy .
 \end{aligned}$$

Siin esimene integraal on null, kuna tema integrand on koordinaatide alguse suhtes paaritu funktsioon:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy &= \int_{-\infty}^0 y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \int_0^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy \\
 &= -\int_0^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy + \int_0^{+\infty} y \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = 0 .
 \end{aligned}$$

(Tegime negatiivsel poolteljel antud integraalis muutujavahetuse $y \rightarrow -y$.)

Teine integraal m avaldises võrdub a korda normaaljaotuse norm. Et tegu on normeeritud jaotusega ja norm on üks, siis olemegi saanud võrduse (6.2).

Võrduse (6.3) tõestamiseks lähtume dispersiooni definitsioonist (2.5)

$$\begin{aligned}
 D &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Tähistame siin ajutiselt eksponendi all $\alpha = 1/(2\sigma^2)$. Siis saame integraali arvutada nii:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \exp(-\alpha y^2) dy = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha y^2) dy. (**)$$

Normeerimistingimusest (punkti 2.7 valem (7.2)) järeldub

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \sigma\sqrt{2\pi},$$

mis parameetritele α üle minnes annab

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha y^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Pannes selle integraali väärtuse avaldisse (**), saame

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy &= -\frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} 2^{3/2} \sigma^3 = \sigma^3 \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Saadud tulemuse paigutamine avaldisse (*) annab valemi (6.3).

Normaaljaotuse praktilisel kasutamisel (näit mõõtevigade teoorias) on levinud juhusliku suuruse X vaatlemine järgmiste piirkondade kaupa vasakule ja paremale matemaatilisest ootusest m :

$$\pm \sigma, \pm 2\sigma, \pm 3\sigma.$$

Vaatleme vastavaid lõike, mille keskel on matemaatiline ootus:

- 1) $[m - \sigma, m + \sigma]$,
- 2) $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$,
- 3) $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$.

Vastavaid lõike nimetame **usaldusintervallideks**.

Küsime esmalt, millise tõenäosusega satub suurus X vahemikku $[m - \sigma, m + \sigma]$ ehk **milline on selle lõigu usaldusnivoo?** Usaldusnivoo mõiste defineerisime punktis 2.3. Vastuse annab valem (7.6), kui seal kasutada usaldusintervalli $[\alpha, \beta]$ otspunkidele väärtusi $\alpha = m - \sigma$, $\beta = m + \sigma$:

$$\begin{aligned} P(m - \sigma < X < m + \sigma) &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-\sigma}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \\ &= \operatorname{erf}(1/\sqrt{2}) = 0,683. \end{aligned}$$

Seega, otsitav usaldusnivoo on väljendatav veafunktsiooni kaudu. Numbrilise väärtuse saamiseks tuleb leida tõenäosusfunktsiooni erf väärtus kohal $1/\sqrt{2} = 0,707$ vastavast tabelist või lasta see välja arvutada arvutil. Viimane on käesoleval ajal kõige levinum viis. Näiteks *Mathcad* sisaldab funktsiooni $\operatorname{erf}(x)$. Tulemus on 0,683 ehk 68,3 %. S.t, kahel kolmandikul juhtudest satub normaalselt jaotunud juhuslik suurus vahemikku $[m - \sigma, m + \sigma]$.

Analoogilised arvutused lõikudel 2) ja 3), s.o usaldusintervallides poollaiustega 2σ ja 3σ annavad vastavalt

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = \operatorname{erf}(2/\sqrt{2}) = 0,954,$$

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = \operatorname{erf}(3/\sqrt{2}) = 0,997,$$

s.t, kahekordse standardhälbe piiridesse satub normaalselt jaotunud juhuslik suurus üheksakümne viiel juhul sajast, ja kolmekordse standardhälbe piiridesse – 997-l juhul tuhandest.

Toodud valemite üldistus intervallile, mis paikneb sümmeetriliselt keskväärtuse suhtes ja mille poollaius on standardhälbe ühikutes mõõdetuna k , on

$$P(m - k\sigma < X < m + k\sigma) = \operatorname{erf}(k/\sqrt{2}).$$

Füüsikaliste suuruste mõõtmisel nimetatakse suurust k **katteteguriks**. Kattetegurile vastav usaldusnivoo väljendatakse protsentides ja tähistatakse p või $p(k)$. Usaldusnivoo arvutusvalem on siis

$$p(k) = 100 \cdot \operatorname{erf}(k/\sqrt{2}). \quad (6.4)$$

Niisiis, katteteguritele $k = 1, 2$ ja 3 vastavad usaldusnivood $68,3\%$, $95,4\%$ ja $99,7\%$.

3.7. Keskväärtuse hindamine mõõtmistulemustest

Punktis 2.6 vaatasime pideva juhusliku suuruse jaotustiheduse eksperimentaalset hindamist. Kui tõenäosustihedus on iga intervalli Δ_j jaoks keskpunktiga punktis x_j hinnatud ja on teada tema ligikaudne väärtus f_j^* , siis saab keskväärtuse hinnata valemiga

$$m \approx m^* = \sum_{j=1}^M x_j f_j^* \Delta_j, \quad (7.1)$$

mis ei ole ju mitte midagi muud, kui punkti (3.1) definitsioonivalemi (1.3)

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

lähendamine lõpliku summaga. Kui kasutada tiheduste f_j^* asemel suhtelisi sagedusi (vt definitsioon punktis 2.6) p_j , mis on tihedustega seotud valemiga $p_j = f_j^* \Delta_j$, siis saab (7.1) tuua kujule

$$m^* = \sum_j x_j p_j. \quad (7.1')$$

See valem on samasuguse väljanägemisega nagu on diskreetse suuruse keskväertuse arvutusvalem. Sisuline erinevus siiski on ja see seisneb selles, et siin on p_j sagedushinnang, mis läheneb nullile, kui intervallide arv läheneb lõpmatuseni ja intervalli pikkus nullile. Sel piirjuhul on muidugi õigem ja järjekindlam kasutada valemit (7.1).

Osutub, **eksisteerib tunduvalt lihtsam viis keskväertuse hindamiseks**, mida enamikul juhtudel kasutatakse, ja mis on eriti õigustatud ja mugav, kui mõõtmiste arv on väike. See keskväertuse hinnang on **aritmeetiline keskmine**. Vaatame taas juhusliku suuruse realisatsioonide jada e **valimit**

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N \quad (7.2)$$

(tõime sisse esmakordselt punktis 2.6, kui asusime sagedusjaotust kirjeldama). Keskväertuse hindamine sellel valimil aritmeetilise keskmisega käib valemiga

$$m \approx \bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (7.3)$$

s.t, me arvutame üksikmõõtmiste aritmeetilise keskmise.

See valem tundub põhjalikult erinevat hinnangust (7.1). Tegelikult on need valemid aga väga lähedased ning annavad lähedased tulemused, eriti kui N ja M on piisavalt suured. Tegemist on vaid erinevate summeerimisviisidega. Aritmeetilise keskmise arvutamisel summeerime tulemused nii, nagu nad meil „naturaalselt“ tulevad, s.o mõõtmistest saame ja saamise järjekorras nummerdanud oleme, seejärel jagame tulemuse läbi katsete üldarvuga. Valemi (7.1) kasutamisel oleme aga eelnevalt grupeerinud liidetavad gruppidesse juhusliku suuruse X lähedaste väärtuste järgi. Et (7.3) ja (7.1) on praktiliselt üks ja seesama, veendume, kui grupeerime summa (7.3)-s ümber ja toome ta kujule (7.1). Selleks tuleb koguda samasse gruppi kõik need mõõtmistulemused, mis kuuluvad väärtuste poolest parajasti intervalli Δ_j ja sel viisil grupeerida kõik N mõõtmistulemust vastavalt x_j kuuluvusele ühte või teisse intervalli:

$$\begin{aligned} \bar{x}_N &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M \sum_{x_k \in \Delta_j} x_k \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M x_j \sum_{x_k \in \Delta_j} 1 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M x_j n_j = \sum_{j=1}^M x_j p_j = \sum_{j=1}^M x_j f_j^* \Delta_j = m^*. \end{aligned}$$

Ümbergrupeerimise olu illustreerib joonis 7.1.

Lõigule Δ_j satub n_j mõõtmistulemust (tähistatud pidevate joontega, kuna mujale sattuvad mõõtmistulemused on antud punktiiriga), mis aga üldjuhul (pideva juhusliku suuruse puhul) võivad erineda intervalli keskväertusest x_j maksimaalselt $\pm \Delta_j / 2$ võrra.

3.8. Dispersiooni hindamine mõõtmistulemustest

Dispersiooni katselisel määramisel on olukord analoogiline keskvaertuse hindamisega. Põhimõtteliselt on võimalik leida eelnevalt juhusliku suuruse X approksimeeriv jaotustihedus f_j^* , seejärel arvutada keskvaertus valemist (7.1) ja dispersioon vastavalt definitsioonivalemile

$$D \approx D^* = \sum_{j=1}^M (x_j - m^*)^2 f_j^* \Delta_j. \quad (8.1)$$

Hoopis levinum (lisaks ka arvutuslikult ökonoomsem ja lihtsam) on siingi **dispersiooni hindamine aritmeetilise keskmisega**:

$$D \approx D_N = \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (8.2)$$

kus \bar{x} on matemaatilise ootuse hinnang valemist (7.3). Standardhälbe hindamiseks saame siit arvutusvalemi

$$\begin{aligned} \sigma &\approx \sigma_N = \sqrt{D_N} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{N} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2]}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Suure mõõtmiste üldarvu N ja suure intervallide arvu M korral on need kaks dispersiooni hinnangut, D^* ja D_N , lähedased ja piiril lähevad mõlema üle tõeliseks dispersiooniks D :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N = \lim_{M, N \rightarrow \infty, \max[\Delta] \rightarrow 0} D^* = D. \quad (8.4)$$

Märkus 1. Piirväärtused (7.4) ja (8.4), mille kohaselt hinnangulised keskvaertused ja dispersioonid lähevad piiril teoreetilisteks väärtusteks, omavad sellise tähenduse ja mõtte, kui meil on juhusliku suuruse jaotusfunktsioon teada ning seega on m ja D ka täpselt teada. Paljudel (enamikul) juhtudel see nii ei ole, juhusliku suuruse jaotusfunktsioon ei ole teada eelnevatest aprioorsetest kaalutlustest. Sel juhul tuleb vaadelda valemeid (7.4) ja (8.4) keskvaertuse ja dispersiooni määrangutena.

Märkus 2. Dispersiooni ja standardhälbe hindamisel valemeist (8.2), (8.3) ei ole mingit vahet, kas mõõdetud suurus on diskreetne või pidev suurus – arvutusvalemid on mõlemal juhul täpselt ühed ja needsamad.

3.9. Ühetaoliselt jaotunud suuruste summa keskväärtus ja dispersioon

Tegelikult on nii keskväärtuse hindamiseks meie poolt kasutusele võetud aritmeetiline keskmine (7.3) kui ka dispersioonihinnang valemiga (8.2) mõlemad juhuslikud suurused. See tähendab seda, et kui korraldada korduvaid katseeriadeid, kus igas seerias tehakse N mõtmist ja arvutatakse aritmeetiline keskväärtus (7.3), siis saadakse iga kord veidi erinev tulemus. Analoogiliselt, iga kord tuleb valemist (8.2) veidi erinev dispersiooni väärtus. On intuiitselt selge – ja seda kinnitab ka eksperiment, et need erinevused on väikesed ja lähenevad nullile N kasvades (vastasel juhul ei kehtiks ka piirväärtused (7.4) ja (8.4)), kuid see ei muuda olematuks tõsiasja, et põhimõtteliselt on nii \bar{X}_N kui D_N juhuslikud suurused. Et uurida nende statistilisi omadusi, on otstarbekas käsitleda summadesse (7.3) ja (8.2) minevaid suurusi X_k sõltumatute, ühesuguselt jaotunud juhuslike suuruste X_k realisatsioonidena.

Vaatleme n sõltumatut juhuslikku suurust X_k ($k = 1, 2, \dots, N$), mis on ühesuguse jaotusega ja järelikult ka ühesuguste arvkarakteristikutega, s.t

$$m[X_k] = a, \quad \mathbf{D}[X_k] = d.$$

Leiame juhuslike suuruste aritmeetilise keskmise

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k$$

arvkarakteristikud. Keskväärtuseks saame

$$m[\bar{X}_N] = m\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k\right] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N m[X_k] = \frac{Na}{N} = a. \quad (9.1)$$

Dispersiooni arvutus on natuke pikem, kuid annab samuti elegantse tulemuse

$$\begin{aligned} D[\bar{X}] &= m\left[\left(\bar{X} - m[\bar{X}]\right)^2\right] = m\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - a\right)^2\right] = m\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a\right)^2\right] = \\ &= m\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - m[X_i])\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} m\left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m\left[X_i X_j\right]. \end{aligned}$$

Kuna juhuslikud suurused on siin vastastikku sõltumatud, siis

$$m\left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ X_i & X_j \end{matrix}\right] = \begin{cases} 0, & \text{kui } i \neq j, \\ d, & \text{kui } i = j. \end{cases}$$

Seepärast saame

$$D[\bar{X}] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N d = \frac{dN}{N^2} = \frac{d}{N}$$

ning järeldusena

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{d}{N}}. \quad (9.2)$$

Seega:

Ühesuguselt jaotunud N sõltumatu suuruse aritmeetilise keskmise dispersioon on N korda väiksem kui üksiksuuruse dispersioon ja standardhälve on \sqrt{N} korda väiksem kui üksiksuuruse standardhälve.

See on väga tähtis ja fundamentaalne tulemus, mida kasutatakse laialdaselt füüsikalistel mõõtmistel. Nimelt – kõigepealt tehakse N mõõtmist. Seejärel leitakse mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \approx m, \quad (9.3)$$

mis vastavalt punkti (3.7) tulemustele võetaksegi mõõdetava suuruse m lähisvärtuseks. Eelneva põhjal on see usaldusväärsem kui üksikmõõtmised ja mõõtmiste arvu suurenemisel aritmeetiline keskmine erineb üha vähem mõõdetava suuruse tegelikust keskmisest väärtusest, kusjuures see erinevuse suurus on hinnatav valemiga aritmeetilise keskmise standardhälbele (9.2).

Empiiriline dispersioon ja standardhälve.

Kuna tavaliselt ei ole teada teoreetilist üksikmõõtmise dispersiooni, tuleb see leida mõõtmistest endist. Loomulik ja mõistetav on ka siin kasutada aritmeetilist keskmist. Siin on võimalikud kaks konkureerivat valemit. Ühe hindamisvalemi me juba tõime sisse seosega (8.2), see on:

$$D \approx \sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x}_N)^2.$$

Teine, konkureeriv valem määrab nn **empiirilise dispersiooni**:

$$D \approx s_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x}_N)^2. \quad (9.4)$$

Mõlema määrangu korral on tegu **juhuslike suurustega**: iga lõpliku N korral on nii σ_N^2 kui s_N^2 mingite juhuslike suuruste realisatsioonid. Osutub, et nende suuruste keskvärtused rahuldavad seoseid

$$m[\sigma_N^2] = \frac{N-1}{N} d, \quad m[s_N^2] = d, \quad (9.5)$$

kus d on juba eespool selles punktis defineeritud üksiksuuruse X_k dispersioon. Nagu näeme, lähendab suurus s_N^2 vähemalt matemaatilise ootuse (keskmise) mõttes tõelist dispersiooni

õigesti, kuna (esmavaatlusel võib-olla mõnevõrra ootamatult) suurus σ_N^2 alahindab dispersiooni. Suurte N -de korral ei ole suurt erinevust, millist dispersioonihinnangut kasutada, väikeste puhul ($N < 10$) aga küll. Seepärast kasutame edaspidi juhuslikus suuruse dispersiooni hindamisel valemit (9.4), mida nimetame suuruse X **empiiriliseks dispersiooniks**. Kehtib

$$s_N^2 \approx d.$$

(Tegemist on muidugi d hinnanguga, mis on seda parem, mida suurem on N !)

Juhusliku suuruse X **empiiriline standardhälve** on vastavalt

$$s_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}{N-1}} \approx \sqrt{d}. \quad (9.6)$$

Kasutades seda hinnangut, saame ka hinnangu aritmeetilise keskmise standardhälbele (9.2)

$$\sigma[\bar{X}] \approx u_N \equiv u(\bar{X}_N) = \sqrt{\frac{s_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}, \quad (9.7)$$

mis on **aritmeetilise keskmise empiiriline standardhälve**.

Näide. Olgu pliiaatsitehases pliiaatsiautomaadi poolt toodetavate pliiaatsite pikkus X . Kui täpne ka ei oleks masin, ka temale on omane eksimine (*eksimine on inimlik* \Rightarrow *eksimine on masinlik*) ja lõppkokkuvõttes pliiaatsite pikkused veidi erinevad üksteisest. Teiste sõnadega: X on juhuslik suurus. Me tahame hinnata:

- (1) milline on keskmine pliiaatsi pikkus mida see masin produtseerib
- (2) milline on üksiku pliiaatsi pikkuse standardhälve
- (3) kui oleme hinnanud pliiaatsi keskmise pikkuse, siis milline on selle keskmise hinnangu enese standardhälve.

Võtame peoga pliiaatseid ja saame valimi (juhuslikult) 30 pliiaatsist: $N = 30$. Mõõdame nad ära, olgu mõõtmisoperatsioon ise täpne ja tulemused olgu x_i . Nüüd:

- a) arvutame aritmeetilise keskmise \bar{x}_N valemist (9.3). See annab meile (hinnangulise) vastuse küsimusele (1); olgu konkreetselt $\bar{x}_N = 198,0$ mm
- b) arvutame empiirilise standardhälbe s_N (8.6). See annab vastuse küsimusele (2).

Olgu konkreetselt $s_N = 1$ mm. Seejuures, eeldusel, et pliiaatsite pikkuse jaotus on normaalne, 67% tõenäosusega asub üksikpliiaatsi pikkus vahemikus

$$\left[\bar{x}_N - s_N, \bar{x}_N + s_N \right] = [197, 199] \text{ mm ja tõenäosusega } 95\% \text{ vahemikus}$$

$$\left[\bar{x}_N - 2s_N, \bar{x}_N + 2s_N \right] = [196, 200] \text{ mm.}$$

- c) lõpuks, arvutame keskmise pikkuse enese hajuvuse valemist (9.4). See annab vastuse küsimusele (3). Konkreetse numbrilise väärtuse $s_N = 1$ mm korral saame

$$u[\bar{X}_N] = s_N / \sqrt{N} = 1 / \sqrt{30} = 1 / 5,48 = 0,18 \text{ mm.}$$

Terminoloogia. Summad \bar{x}_N, D_N, s_N kujutavad enesest keskmisi paljudest sõltumatutest muutujatest. Nende ühiseks tunnuseks on, et nad iseloomustavad juhusliku suuruse keskmisi karakteristikuid tunduvalt paremini kui üks juhuslik suurus eraldi võttes. Niisuguseid funktsioone nimetatakse matemaatilises statistikas **statistikuteks**.

Definitsioon. Valimil $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N$ määratud funktsiooni $y(x_1, \dots, x_N)$ nimetatakse selle valimi statistikuks.

Nii näiteks on keskvärtuse hinnang (7.3) **keskväärtuse statistik** ja dispersioonihinnang (8.2) on **dispersiooni statistik**.

4. JUHUSLIKUD VEKTORID

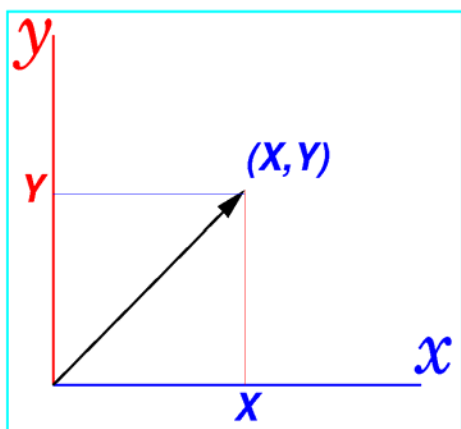
4.1. Juhusliku vektori mõiste

n -mõõtmeliseks juhuslikuks vektoriks nimetatakse vektorit

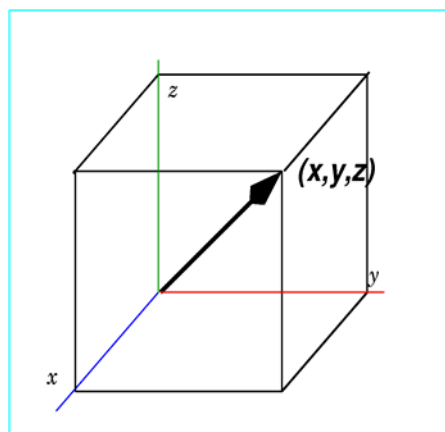
$$(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

kus komponendid X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) on juhuslikud suurused.

Kui $n = 2$, siis kasutame tähistusi $X_1 = X$, $X_2 = Y$. Kahemõõtmeline juhuslik vektor (X, Y) on juhuslik vektor (vabavektor või kohavektor) tasandil (joonis 1.1). Juhuslike suuruste paari (X, Y) võib interpreteerida ka juhusliku punktina tasandil. Analoogiliselt $n = 3$ korral (X, Y, Z) on kas juhuslik vektor ruumis või juhuslik punkt ruumis (joonis 1.2).



Joonis 1.1



Joonis 1.2

Vektori komponendid X_j võivad olla nii diskreetset kui ka pidevat tüüpi juhuslikud suurused.

4.2. Kahemõõtmelised diskreetsed juhuslikud vektorid

Vaatleme (lihtsuse mõttes) kahemõõtmelist diskreetset juhuslikku vektorit (X, Y) , kus komponendid võivad omandada diskreetseid väärtusi

$$X : x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m,$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_n.$$

Sellise juhuslikku vektori täieliku tõenäosusliku kirjelduse annab **jaotustabel**.

Tähistame tõenäosuse, et X omandab väärtuse x_i ja Y omandab väärtuse y_j , p_{ij} -ga:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Jaotustabel on siis kujul

Y	y_1	y_2	\dots	y_n
X				
x_1	p_{11}	p_{12}	\dots	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mn}

Jaotustabeli kõik elemendid on positiivsed (kuna nad on tõenäosused). Kehtib normeerimistingimus

$$\sum_{i=1, j=1}^{m, n} p_{ij} = 1. \quad (2.2)$$

See normeerimistingimus väljendab tõsiasja, et summaarne tõenäosus mistahes suvalise (x_i, y_j) saamiseks on alati üks (tegemist on tõese sündmusega).

Ilmselt annab p_{ij} summeerimine üle indeksi j fikseeritud i korral kogutõenäosuse x_i saamiseks suvalise Y väärtuse korral. Seega:

$$p_i^x \equiv P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij}, \quad (2.3)$$

kus p_i^x on juhusliku suuruse X tõenäosusjaotus. Analoogiliselt annab p_{ij} summeerimine üle indeksi i fikseeritud j korral kogutõenäosuse y_j saamiseks suvalise X väärtuse korral:

$$p_j^y \equiv P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij}. \quad (2.4)$$

Kaht diskreetsset juhuslikku suurust X ja Y nimetatakse **sõltumatuteks**, kui tõenäosus p_{ij} esitub tõenäosuste p_i^x ja p_j^y korrutisena:

$$p_{ij} = p_i^x p_j^y.$$

Näide. Olgu meil kaks kuetahulist täringut. Ühel olgu silmad ühest kuueni (tavaline täring), teisel olgu tahud värvitud paarikaupa siniseks, punaseks ja kollaseks.

4.3. Kahemõõtmeline pidev juhuslik vektor

Kahemõõtmeline juhuslik vektor (X, Y) on pidev, kui tema mõlemad komponendid X ja Y on pidevad juhuslikud suurused. Eelnevas punktis vaadeldud diskreetse juhusliku vektori jaotustabeli loomulikuks üldistuseks ning samal ajal ka ühemõõtmelise pideva juhusliku suuruse üldistuseks kahemõõtmelisele juhule on *kahemõõtmeline jaotusfunktsioon* ehk *kahemõõtmeline jaotustihedus* ehk *kahemõõtmeline tõenäosustihedus* $f(x, y)$, mis on defineeritud järgneva seosega:

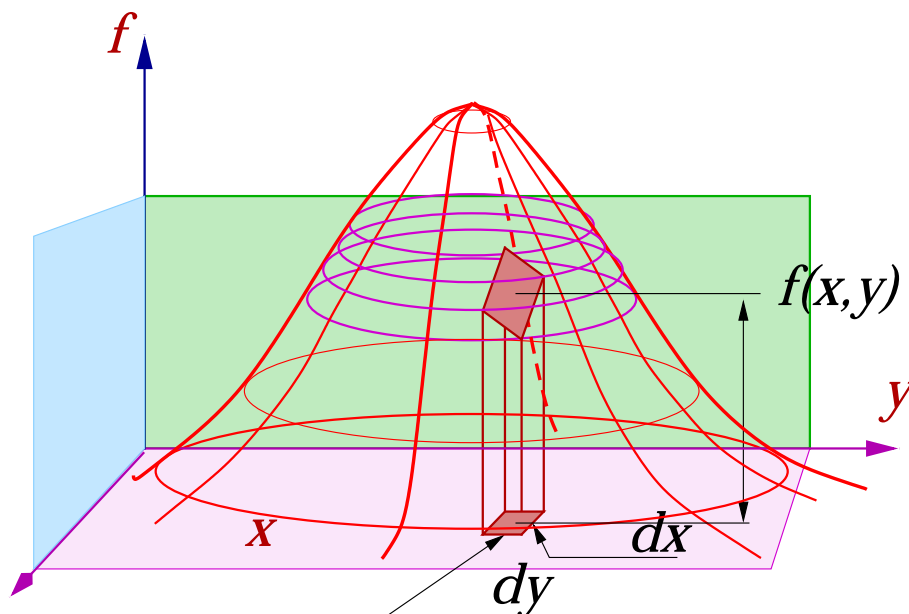
$$P(x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy) = f(x, y) dx dy. \quad (3.1)$$

Niisiis, *tõenäosus saada juhuslik vektor punkti (x, y) ümbrusse pinnaelemendile $dS = dx dy$ on võrdeline selle pinnaelemendi pindalaga, kusjuures võrdeteguriks on tõenäosustihedus.*

Avaldame valemist (3.1)-st tõenäosustiheduse:

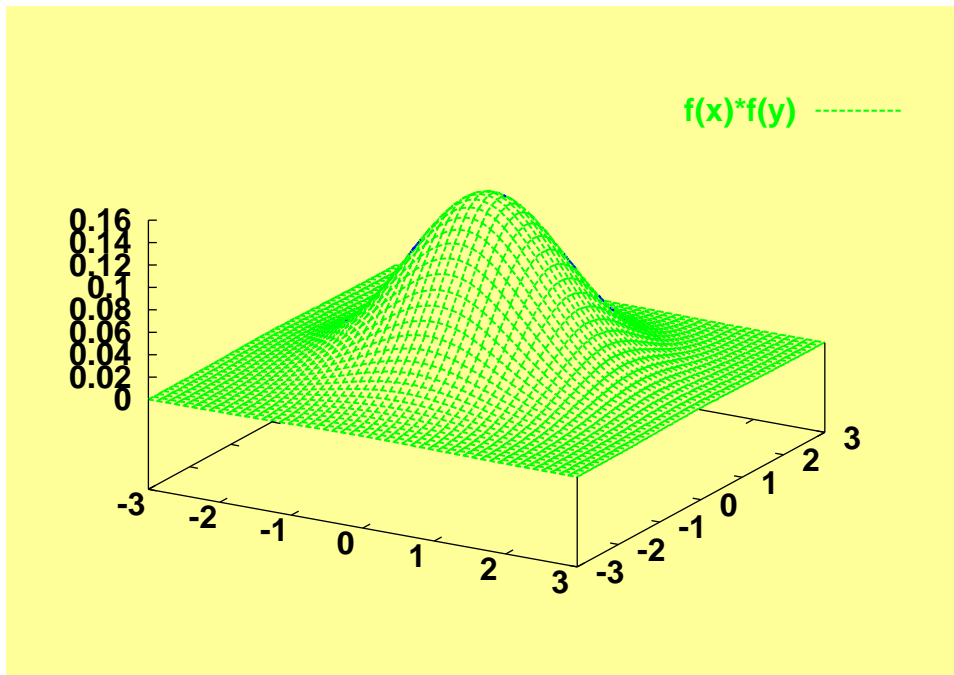
$$f(x, y) = \frac{P(x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy)}{dx dy}.$$

See esitus ütleb, *et tõenäosustihedus on tõenäosus pinnaühiku kohta vektori (X, Y) sattumiseks punkti (x, y) ümbrusesse.* Tõenäosus $P(x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy)$ on võrdne risttahuka ruumalaga, mille aluse külgede pikkused on dx ja dy ning kõrgus on $f(x, y)$ (joonis 3.1). Seepärast nimetatakse seda suurust $P(x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy)$ ka *tõenäosuselemendiks*.



Joonis 3.1

Samas koordinaadistikus kujutab tõenäosustihedus kõverpinda, mis kõikjal paikneb ülalpool x, y -tasandit nagu kujutatud joonisel 3.2.



Joonis 3.2. Kahemõõtmelise jaotuse näide (kahemõõtmeline normaaljaotus)

Diskreetse normeerimistingimuse (2.2) pidev analoog on

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy \equiv \iint_{R^2} f(x, y) \, dS = 1. \quad (3.2)$$

$R^2 = (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty)$ tähistab siin kogu tasandit, dS on pinnaelement sellel tasandil.

Analoogiliselt (2.3) ja (2.4)-ga annab jaotustiheduse integreerimine ühe argumendi järgi ühemõõtmelise jaotustiheduse teisele vektori komponendile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy = g(x), \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx = h(y), \quad (3.4)$$

kus $g(x)$ on juhusliku suuruse X jaotustihedus ja $h(y)$ on juhusliku suuruse Y jaotustihedus.

Kahte pidevat juhuslikku suurust (juhusliku vektori komponente) nimetatakse **sõltumatuteks** (nad on sõltumatud juhuslikud suurused), kui nende jaotusfunktsioon esitub ühemõõtmeliste jaotuste korrutisena:

$$f(x, y) = g(x)h(y). \quad (3.5)$$

Sõltumatuteks nimetamine on õigustatud sellega, et siin ühe suuruse realiseerumise tõenäosus ei sõltu sellest, milline on parajasti teise suuruse väärtus.

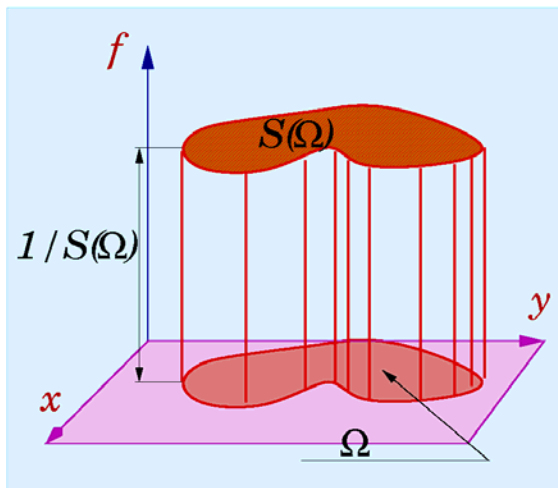
Näide 1. Olgu juhuslikuks sündmuseks konkreetse inimese valimine kogu maakera elanikkonna (inimsoo) hulgast. Selle inimese pikkus X on juhuslik suurus, samuti tema vanus (sekundites) Y . Koos moodustavad pikkus ja vanus kahemõõtmelise vektori (X, Y) . Ilmselt ei ole siin tegu sõltumatute juhuslike suurustega, kuna vananedes (vähemal esimese 15–20 aasta jooksul) suureneb ka kasv.

Märkus. Vaadates lisaks vanusele ja kasvule ka kehakaalu Z , saame iga juhusliku sündmusega juba siduda kolmemõõtmelise juhusliku vektori (X, Y, Z) . Vektori dimensiooni on võimalik veelgi jätkata, sest inimesel on kaugelt suurem hulk juhuslikke („kordumatuid“) parameetreid kui siinnimetatud kolm.

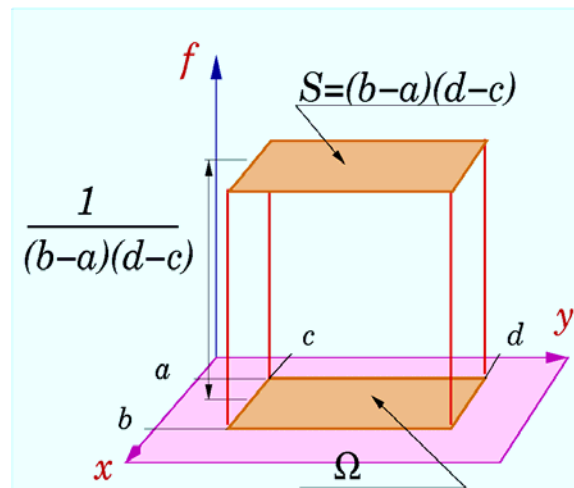
Näide 2. Kahemõõtmelise, piirkonnas Ω ühtlaselt jaotunud juhusliku vektori jaotustihedus on

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(\Omega)}, & (X, Y) \in \Omega, \\ 0, & (X, Y) \notin \Omega, \end{cases}$$

kus $S(\Omega)$ on kujundi Ω pindala. Jaotustihedus on konstantne ala Ω kõigis punktides (see konstantsus tähendabki ühtlast jaotumust). Et konstant on just parajasti võrdne ala pindala pöördväärtusega, see järeldeb normeerimistingimusest (3.2) (näidata iseseisvalt). Kahemõõtmelise ühtlaselt jaotunud juhusliku suuruse jaotustiheduse näide on toodud joonisel 3.3a.



Joonis 3.3a



Joonis 3.3b

Et ühtlase jaotusega kahemõõtmelise vektori komponendid X ja Y oleksid vastastikku sõltumatud, peab piirkond Ω olema ristkülik, mis on orienteeritud x, y -telgede suhtes (joonis 3.3b). Sel juhul on jaotustihedus alas Ω esituv ühedimensionaalsete jaotuste korrutisena:

$$f(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} = g(x) h(y),$$

kus $g(x)$ ja $h(y)$ on vastavad ühemõõtmelised ühtlased jaotused, mis on lokaliseeritud lõikudel $[a, b]$ ja $[c, d]$:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \quad x > b, \end{cases}$$

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{(d-c)}, & c \leq y \leq d, \\ 0, & y < c, \quad y > d. \end{cases}$$

Lihtne on veenduda, et kõik selles näites esitatud jaotused on korrektselt normeeritud ühele.

Näide 3. Kahe normaalselt jaotunud (vt punkt 2.7), vastastikku sõltumatu juhusliku suuruse, mille jaotusfunktsioonid on vastavalt

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \text{ja} \quad h(y) = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2\mu^2}\right),$$

ühine jaotusfunktsioon esitub korrutisena

$$f(x, y) = g(x) h(y) = \frac{1}{2\pi \sigma\mu} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-b)^2}{2\mu^2}\right).$$

Selle funktsiooni (kvalitatiivne) graafik on juhul $a = b = 0$, $\sigma = \mu = 1$ esitatud joonisel 3.2.

4.4. Juhusliku kahemõõtmelise vektori keskväärtus

Kahemõõtmeline juhuslik vektor komponentidega (X, Y) on täielikult iseloomustatud kahemõõtmelise jaotustiheduse $f(x, y)$ poolt. Sealhulgas, kahemõõtmelisest jaotustihedusest saab arvutada ka suuruste X ja Y ühemõõtmelised jaotustihedused $g(x)$ ja $h(y)$ vastavalt eelnevas punktis toodud valemitele (3.3) ja (3.4). Järgnevates punktides anname sama vektori statistilise kirjelduse esimest ja teist järku momentide tasemel.

Kahemõõtmelise juhusliku vektori (X, Y) keskvärtus on mittejuhuslik kahemõõtmeline vektor $(m[X], m[Y])$ komponentidega, mille väärtusteks on vastavate ühemõõtmeliste juhuslike suuruste keskvärtused:

$$m[X] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, g(x),$$

$$m[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \, y \, f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \, y \, h(y).$$

Keskvärtuse omadusi.

Mõningad ühemõõtmelise juhusliku suuruse keskvärtuse põhiomadused tõime punktis 3.1. Lisame siin veel mõned, mis kehtivad kahemõõtmelise juhusliku suuruse/juhusliku vektori puhul.

Aditiivsus. Kahe juhusliku suuruse summa keskvärtus on nende keskvärtuste summa

$$m[X + Y] = m[X] + m[Y].$$

Tõestuseks saame kirjutada

$$\begin{aligned} m[X + Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) \, dx \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) \, dy = m[X] + m[Y]. \end{aligned}$$

Multiplikatiivsus. Kui juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, siis

$$m[X \cdot Y] = m[X]m[Y].$$

Tõestus on analoogiline eelneva juhuga. Kasutame ära asjaolu, et sõltumatute juhuslike suuruste korral kehtib paragrahv 2.6 valem (6.9): $f(x, y) = g(x)h(y)$. Seetõttu

$$\begin{aligned} m[X \cdot Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot y) f(x, y) \, dx \, dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) \, dy = m[X]m[Y]. \end{aligned}$$

4.5. Kovariatsioonimaatriks

Kahemõõtmelise juhusliku vektori (X, Y) kovariatsioonimaatriks on teist järku tsentreeritud (sega)momentide maatriks dimensiooniga 2×2 :

$$\begin{vmatrix} m[(X - m[X])^2] & m[(X - m[X])(Y - m[Y])] \\ m[(Y - m[Y])(X - m[X])] & m[(Y - m[Y])^2] \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} D[X] & K[X, Y] \\ K[X, Y] & D[Y] \end{vmatrix} .$$

Niisiis, see on II järku sümmeetriline ruutmaatriks. Segamomentide maatriksi kujul kirjutamine on siin vaid parema ülevaatlikkuse saavutamiseks. Diagonaalelemendid on juhusliku vektori komponentide dispersioonid

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m[X])^2 g(x) dx, \quad D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m[Y])^2 h(y) dy .$$

Need langevad kokku ühemõõtmelise juhusliku suuruse dispersioonidega.

Kõrvalelemendid (mittediagonaalsed elemendid maatriksis) on võrdsed ja kujutavad enesest **juhuslike suuruste X ja Y korrelatsioonimomenti** ehk **kovariatsiooni**, mille tähis on

$$K, \quad K[X, Y], \quad \text{cov}[X, Y]$$

Tähis **COV** on rohkem kasutusel matemaatikute hulgas.

Kovariatsioonimoment on defineeritud integraaliga

$$K \equiv K[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m[X])(y - m[Y])f(x, y) dx dy. \quad (5.1)$$

ehk keskmistusoperaatorit kasutades

$$K[X, Y] = m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} .$$

See on X ja Y **tsentreeritud teist järku segamoment**: kumbki juhuslik suurus läheb sellesse avaldisse esimeses astmes, moment on aga teist järku, kuna X ja Y teineteisega korrutamise tõttu on siin juhuslikkus teises astmes.

Korrelatsioonimomendi arvutamiseks võib kasutada (8.1)-st tulenevat arvutuvalemit (tuletada iseseisvalt!)

$$K[X, Y] = m[XY] - m[X]m[Y].$$

Kõrvuti korrelatsioonimomendiga K on kasutusel ja levinud suurus ka **korrelatsioonikordaja r** , mis on standardhälvetele normeeritud korrelatsioonimoment:

$$r \equiv r[X, Y] = \frac{K[X, Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]} . \quad (5.2)$$

Märkus. On võimalik defineerida ka juhusliku suuruse korrelatsioonimoment ja korrelatsioonikordaja iseendaga: $K[X, X]$ ja $r[X, X]$. Ilmselt aga kehtib $K[X, X] = D[X]$, $r[X, X] = 1$.

Korrelatsioonikordaja ja korrelatsioonimomendi omadusi.

1. Sõltumatute juhuslike suuruste korrelatsioonikordaja.

Sõltumatute juhuslike suuruste korrelatsioonimoment K ja korrelatsioonikordaja r on nullid. Selles on lihtne veenduda, kasutades asjaolu, et sõltumatute juhuslike suuruste tõenäosustihedus esitub ühemõõtmeliste tiheduste korrutisena (vt punkt (4.3), valem (3.5)):

$f(x, y) = g(x)h(y)$. Seetõttu annab (8.1)

$$K[X, Y] = m \left[\begin{matrix} 0 \\ X \end{matrix} \right] m \left[\begin{matrix} 0 \\ Y \end{matrix} \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

ning järeldusena (5.2)-st $r[X, Y] = 0$.

2. Korrelatsioonikordaja tõkestatus. Kehtib (Cauchy-Bunjakovski-Schwartzi) võrratus

$$(K[X, Y])^2 \leq D[X]D[Y] \quad (5.3)$$

ehk

$$|K[X, Y]| \leq \sigma[X]\sigma[Y],$$

millest järeldub tingimus korrelatsioonikordajale

$$-1 \leq r \leq 1. \quad (5.4)$$

Tõestuseks vaatleme alati mittenegatiivset suurust

$$p(a) \equiv m \left[\left(\begin{matrix} 0 \\ X + aY \end{matrix} \right)^2 \right] \geq 0.$$

Siin a on suvaline reaalne parameeter. Selle avaldisega oleme defineerinud parameetri a funktsiooni $p(a)$, mis peab olema mittenegatiivne suvalise a väärtuse korral. Arendades siin ruutliikme binoomina, saame sama tingimuse kujul

$$p(a) = D[X] + 2aK[X, Y] + a^2D[Y] \geq 0.$$

Kui $a \rightarrow \pm\infty$, siis p kasvab piiramatult ja läheneb $+\infty$ -le. Funktsiooni miinimum peab saabuma mingis vahepunktis a_0 , aga ka seal ei tohi p omandada negatiivset väärtust, s.t peab kehtima

$$p(a_0) = D[X] + 2a_0K[X,Y] + a_0^2D[Y] \geq 0. \quad (*)$$

Miinumipunkti saame $p(a)$ esimese tuletise nulltingimusest:

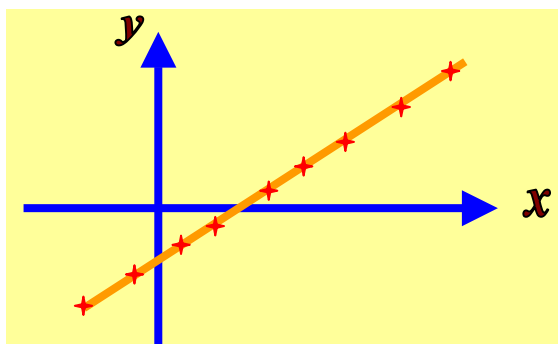
$$\frac{dp}{da} = 2K[X,Y] + 2aD[Y] = 0,$$

millest

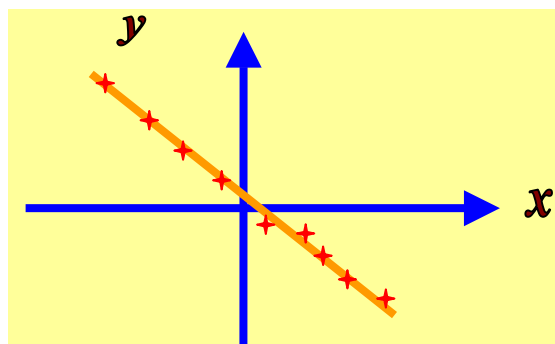
$$a_0 = -K[X,Y]/D[Y].$$

Pannes selle miinumipunkti koordinaadi väärtuse võrratusse (*), saamegi Cauchy-Bunjakovski-Schwartzi võrratusse (5.3).

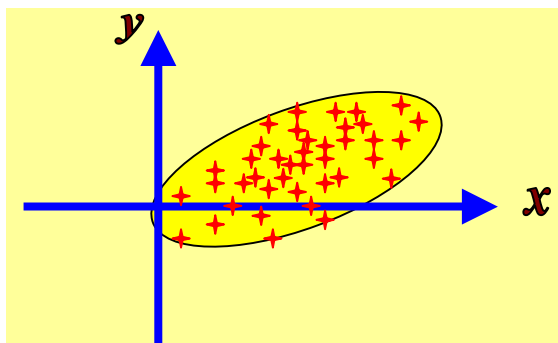
Korrelatsioonikordaja r väljendab funktsionaalse sõltuvuse määra juhuslike suuruste X ja Y vahel. Kui nad on täitsa sõltumatud, siis on (nagu äsja eespool näidatud sai) korrelatsioonikordaja null. Absoluutselt maksimaalse väärtuse saavutab korrelatsioonikordaja, kui X ja Y on omavahel lineaarses sõltuvuses. **Selletõttu nimetataksegi vaadeldavat korrelatsioonikordajat lineaarseks.** Võib öelda, et korrelatsioonikordaja absoluutväärtus iseloomustab teatud mõttes X ja Y vahelise lineaarse seose tugevust (vt joonised 5.1, 5.2, 5.3 ja 5.4).



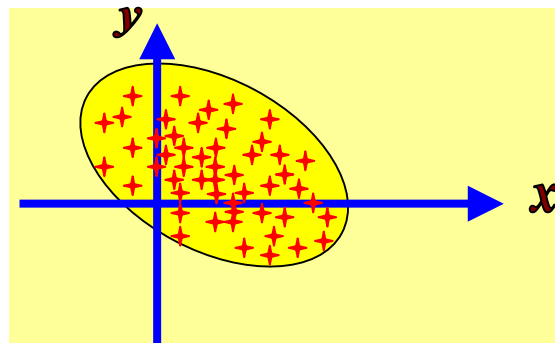
Joonis 5.1a. X ja Y vahel on positiivne lineaarne sõltuvus



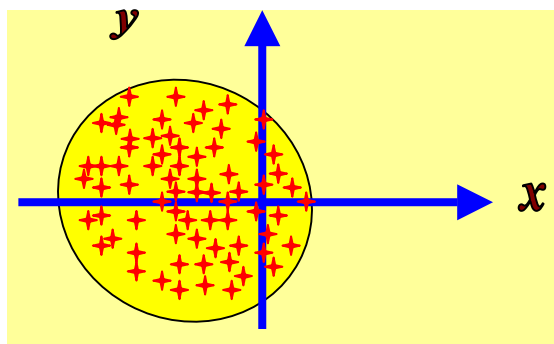
Joonis 5.1b. X ja Y vahel on negatiivne lineaarne sõltuvus



Joonis 5.2. X ja Y vahel on tugev positiivne korrelatsioon



Joonis 5.3. X ja Y vahel on nõrk negatiivne korrelatsioon



Joonis 5.4. X ja Y vahel lineaarne korrelatsioon praktiliselt puudub.

5. MÕÖTEMÄÄRAMATUS FÜÜSIKALISTEL MÕÖTMISTEL

5.1. Füüsikalised suurused ja nende mõõtmine

Füüsikaline suurus – see on keha, aine või nähtuse oluline omadus, mida saab kvalitatiivselt eristada ja kvantitatiivselt määrata.

Mõõtmine on füüsikalise suuruse väärtuse määramine katselisel teel sellekohaste tehniliste vahendite abil. Mõõtmised võivad olla otsesed või kaudsed.

Otsemõõtmine on selline mõõtmine, mille puhul meid huvitava suuruse väärtus registreeritakse vahetult mõõtmisvahendi skaalalt või saadakse vahetult mõõduga võrdlemise teel. Näiteks pingemõõtmine voltmeetriga on otsemõõtmine, sest pingemõõtmine saadakse teada vahetult voltmeetri skaalalt. Samuti on otsemõõtmine pikkuse mõõtmine joonlaua või nihikuga. Seejuures võivad otsemõõtmised sisaldada arvutusi üleminekukordajate või skaala jaotise väärtuse arvutamiseks. Sellised arvutused ei muuda füüsikalise suuruse mõõtmist kaudmõõtmiseks.

Kaudmõõtmine on mõõtmine, kus mõõtmistulemus leitakse arvutuste teel (valemi abil) otsemõõdetud suurustest.

Näide. Elektrivoolu töö leidmiseks mõõdame pingemõõtmisega U voltmeetriga, voolutugevuse I ampermeetriga ja aja t sekundkellaga ning töö arvutame valemist $A = UI t$.

Füüsikalise suuruse väärtus Y on tema väärtuse hinnang arvu y ja ühiku $[Y]$ korrutise kujul, mis näitab mitu korda mõõdetav suurus erineb ühikuks valitud samanimelisest füüsikalise suurusest.

Füüsikalise suuruse väärtuse võib esitada kujul

$$Y = y [Y], \quad (1.1)$$

kus $[Y]$ on teise sama liiki füüsikalise suuruse väärtus, mis on valitud ühikuks, ja y kujutab endast arvu, mitu korda mõõdetav füüsikaline suurus on ühikust suurem. **Võrrandit (1.1) nimetatakse mõõtmiste põhivõrrandiks.**

Füüsikalised suurused võib jagada divitiivseteks ja aditiivseteks.

Divitiivne suurus on selline füüsikaline suurus, kus füüsikalise suuruse väärtus on üheselt määratud ja ei sõltu nullnivoo valikust.

Näide. Keha mass on divitiivne suurus.

Aditiivne suurus on selline füüsikaline suurus, kus füüsikalise suuruse väärtust on võimalik määrata ainult teatava nullnivoo suhtes.

Näited. Potentsiaalne energia on aditiivne suurus, samuti on aeg aditiivne suurus. Potentsiaalset energiat saab määrata ainult teatava nullnivoo suhtes. Kui mõõtmiste nullnivooks valida maapind, siis saame erineva tulemuse võrreldes juhuga, kus nullnivooks on valitud kolmandal korrusel paikneva korteri põrand. Seejuures ajaintervall ja potentsiaalse energia muutus on juba divitiivsed suurused, sest neid saab üheselt määrata sõltumata nullnivoo valikust.

Teine võimalus füüsiliste suuruste klassifitseerimiseks on nende jaotamine kardinaalseteks ja ordinaalseteks suurusteks. **Kardinaalseid suurusi** omavahel võrreldes on võimalik öelda, mitu korda üks suurus teisest erineb. **Ordinaalsete suuruste** võrdlemisel saame ainult väita, et üks suurus on teisest suurem või väiksem. Selgusetuks jääb aga, mitu korda üks suurus teisest suurem või väiksem on. Enamus füüsilistest suurustest on kardinaalsed suurused. Ordinaalse suuruse näiteks võib tuua kliendi rahulolu mõiste, mida kasutatakse mikroökonomikas.

Mõõtmiste juures on väga oluline mõõtühiku valik. Põhimõtteliselt võiks ühikuks valida ükskõik millise sama liiki füüsilise suuruse väärtuse ja seejärel mõõta, mitu korda on mõõdetav objekt meie ühikust suurem või väiksem. Vanasti seda ka tehti. Materiaalse kultuuri ajalugu tunneb tohutut hulka erisuguseid ühikuid, eriti pikkuse, pindala ja massi mõõtmiseks. Selline ühikute mitmekesisus on mingil määral säilinud tänapäevani. Suure hulga erisuguste ühikute puhul on probleemiks nendest ühikutest arusaamine. Kui igal inimesel oleksid omad ühikud, millega ta mõõteobjekte võrdleb, siis oleks teistel inimestel väga raske neid mõõtmistulemusi kasutada. Sellepärast on vajalikud inimestevahelised kokkulepped ühikuteks valitavate suuruste osas. Tänapäeva maailmas peaksid sellised kokkulepped olema ülemaailmsed, s.t tuleks valida sellised ühikud, mis kehtiksid kõikides maades.

Nagu öeldud, ühikute süsteemi moodustamisel ja baasühikute valikul on põhimõtteliselt suur vabadus. Praktilised kaalutlused piiravad seda vabadust tunduvalt. Suurused, mille mõõtühikud valitakse baasühikuteks, peavad peegeldama mateeria võimalikult üldisi omadusi. Kõik mateeria vormid eksisteerivad ajas ja ruumis. Seepärast on loomulik võtta baasühikute hulka aja ja ruumi mõõtühikud. Kolmas baasühik on mass. Nende kolme ühiku alusel moodustatud süsteemi nimetati vanasti absoluutseks süsteemiks. Tänapäeval seda terminit enam ei kasutata.

5.1.1. Rahvusvaheline mõõtühikute süsteem

Tänapäeval enim levinud mõõtühikute süsteem on **SI** (prantsuse keeles: *Système International d'Unités*), tõlkes “rahvusvaheline süsteem”. SI süsteemi baasühikuteks on:

L	Pikkusühik	m
M	massiühik	kg
T	ajaühik	s
I	voolutugevuse ühik	A
Θ	temperatuuri ühik	K
N	ainehulga ühik	mol
J	valgustugevuse ühik	cd

Rahvusvahelise süsteemi baasühikud on defineeritud tabelis 1.

TABEL 1. Rahvusvahelise süsteemi baasühikud

Baasühikud	Dimensiooni tähis	SI ühik	Definitsioon
	L	m	Pikkusühik <u>meeter</u> on teepikkus, mille valgus läbib vaakumis $1/299\,792\,458$ s jooksul.
	M	kg	Massiühik <u>kilogramm</u> võrdub rahvusvahelise kilogrammi etaloni massiga.
	T	s	Ajaühik <u>sekund</u> on tseesium-133 aatomi põhiseisundi kahe ülipeenstruktuurinivoo vahelisele üleminekule vastava kiirguse $9\,192\,631\,770$ perioodi kestus.
	I	A	Voolutugevuse ühik <u>amper</u> on muutumatu elektrivoolu tugevus, mis hoituna vaakumis teineteisest 1 m kaugusele paigutatud kahes lõpmata pikas paralleelses ja tähtsusetult väikse ümara ristlõikega sirgjuhtmes, tekitab nende juhtmete vahel jõu $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.
	Θ	K	Temperatuuri ühik <u>kelvin</u> on $1/273,16$ osa vee kolmikpunkti termodünaamilisest temperatuurist.
	N	mol	<u>Mool</u> on süsteemi ainehulk, mis sisaldab sama arvu elementaarseid koostisosakesi nagu on aatomeid $0,012$ kilogrammis süsiniku isotoobis ^{12}C . Mooli kasutamisel peab koostisosakeste tüüp olema täpsustatud. Need võivad olla aatomid, molekulid, ioonid, elektronid, mingid teised osakesed või kindla koosseisuga grupid neist osakekestest.
	J	cd	<u>Kandela</u> on valgustugevus, mis kiiratakse kindlas suunas monokromaatilisest allikast kiirgussagedusel $540 \cdot 10^{12}$ Hz, kui allika kiirgustugevus selles suunas on $1/683$ W/sr.

5.1.2. CGS süsteem

Teiseks levinud süsteemiks on CGS süsteem, mille baasühikuteks on

L	pikkusühik	cm
M	massiühik	g
T	ajaühik	s

Tegelikult tuuakse CGS süsteemis veel sisse temperatuuri T ühik K (kelvin), ainehulga N ühik mol ja valgusvoo Φ ühik lm (luumen).

5.1.3. Kordsed mõõtühikud

Mõõdetavate suuruste väärtus võib olla kord suur ja kord väike. Seetõttu on otstarbekas omada ka mitmesuguse suurusega ühikuid sama liiki füüsilise suuruse mõõtmiseks, kusjuures tingimuseks on, et ühtedelt ühikutelt teistele üleminek peab olema võimalikult lihtne. Niisugusteks mõõtühikuteks said meetermõõdustiku ühikud, mis loodi Prantsuse revolutsiooni ajal “kõikideks aegadeks, kõigile inimestele, kõigi riikide jaoks” (prantsuse keeles: pour tous les temps, pour tous les peuples, pour tous les pays).

Meetermõõdustiku ehk kümnendsüsteemi oluliseks omaduseks on see, et ühe ja sama suuruse erinevad mõõtühikud suhtuvad üksteisesse nagu kümne täisarvulised astmed. Kasutatavate kümnendliidete selgitus on toodud **tabelis 2**. Hoolimata meetermõõdustiku ilmsetest eelistest kasutatakse mitmetes maades tänaseni kohalikku süsteemi (Inglismaa, USA).

TABEL 2. Kümnendliidete kordsete mõõtühikute moodustamiseks

10^{24}	jota-	Y	10^{-24}	jokto-	y
10^{21}	zeta-	Z	10^{-21}	zepto-	z
10^{18}	eksa-	E	10^{-18}	atto-	a
10^{15}	peta-	P	10^{-15}	femto-	f
10^{12}	tera-	T	10^{-12}	piko-	p
10^9	giga-	G	10^{-9}	nano-	n
10^6	mega-	M	10^{-6}	mikro-	μ
10^3	kilo-	k	10^{-3}	milli-	m
10^2	hekto-	h	10^{-2}	senti-	c
10^1	deka-	da	10^{-1}	detsi-	d

5.1.4. Tuletatud ühikud

Lisaks baasühikutele kasutatakse veel **tuletatud ühikuid**. Et kaudsel mõõtmisel saadakse otsitava suuruse väärtus teiste, temaga seotud suuruste järgi, siis on võimalik kehtestada niisuguseid seoseid ka ühikute vahel. Need seosed ja seaduspärasused on aluseks ka põhi- ja tuletatud ühikute vaheliste seoste määramisel. Näiteks jõud F avaldub Newtoni teise seaduse järgi valemiga $F = m a$, kus m tähistab massi ja a kiirendust. SI süsteemis mõõdetakse massi kilogrammides ning kiirendust ühikutes m s^{-2} . Jõu ühikuks saame nüüd $[F]_{SI} = \text{kg m s}^{-2} = \text{N}$. Täispikkade tuletatud ühikute kasutamine igapäevaelus on suhteliselt kohmakas, seetõttu on mitmetele enamkasutatavatele tuletatud ühikutele antud oma erinimetused ja -tähis. Eelmises näites toodud SI süsteemi jõu ühikut kutsutakse njuutoniks. Erinimetusega tuletatud ühikute tähised on toodud **tabelis 3**.

TABEL 3. Erinimetusega tuletatud ühikud

Hz	herts (sagedus)	S	siimens (el. juhtivus)
N	njuuton (jõud, kaal)	Wb	veeber (magnetvoog, magn. induktsiooni voog)
Pa	paskaal (rõhk, meh. pinge)	T	tesla (magnetvoo tihedus, mag. induktsioon)
J	džaul (töö, soojus, energia)	H	henri (induktiivsus)
C	kulon (elektrilaeng)	V	volt (el.pinge, potentsiaal, potentsiaalide vahe)
lm	luumen (valgusvoog)	lx	luks (valgustatus)
W	vatt (võimsus)	Bq	bekerell (radioaktiivse aine aktiivsus)
nt	nitt (heledus)	Sv	siivert (ekvivalentne kiirgusdoos)
F	farad (el. Mahtuvus)	Gy	grei (neeldunud kiirguse doos)
Ω	oom (el. Takistus)	rad	radiaan (nurk)
		sr	steradian (ruuminurk)

Mitme mõõtühikute süsteemi olemasolu tekitab vajaduse teisendada ühikuid ühest süsteemist teise. On selge, et baasühikute muutmine toob kaasa ka tuletatud ühikute muutumise. Näiteks võttes teepikkuse ühikuks meetri asemel kilomeetri ja ajaühikuks sekundi asemel tunni, saame kiirusühikuks kilomeetri tunnis ($1 \text{ m s}^{-1} = 3,6 \text{ km h}^{-1}$). Seetõttu on ilmselt soovitatav leida niisugune seos, mis näitaks, kuidas muutub baasühikute muutmisel meid huvitava suuruse tuletatud ühik. Niisuguseid seoseid kutsutakse dimensioonvalemiteks.

5.1.5. Dimensioonivalem

Mistahes füüsikalise suuruse dimensiooni saab avaldada Tabelis 1 toodud seitsme põhisuuruse kaudu. Vastavat avaldist nimetatakse **dimensioonivalemiks**. Üldkujul võib dimensioonivalemi üles kirjutada järgmiselt:

$$\dim U = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\varepsilon N^\nu J^\kappa.$$

Tähised kirjutatakse alati sellises tähestikulises järjekorras.

Näide 1: Dimensioonivalem pinge jaoks avaldub järgmiselt:

$$\dim U = L^2 M T^{-3} I^{-1}.$$

SI süsteemi baasühikute asendamisel dimensioonvalemisse saame pinge ühikuks SI süsteemis

$$[U]_{SI} = \text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}.$$

Seda ühikut nimetatakse voldiks.

Näide 2: Eespool nägime, et jõud F avaldub Newtoni teise seaduse järgi valemiga $F = m a$.

SI süsteemi ühikuks saime $[F]_{SI} = \text{kg m s}^{-2} = \text{N}$. Dimensioonvalemiks võime seega kirjutada $\dim F = L M T^{-2}$.

5.1.6. Tõenäosustiheduse dimensioon

Jaotustiheduse dimensioon on juhusliku suuruse dimensiooni pöörväärtus: Kui X dimensioon on $\dim X$, siis $f(x)$ dimensioon on $(\dim X)^{-1}$. See jäeldub asjaolust, et tõenäosus juhusliku suuruse sattumiseks elementaarintervalli dx : $dP = f(x)dx$ on dimensioonitu suurus:

$$\dim dP = 1.$$

Et

$$\dim dP = \dim(f dx) = (\dim f) \cdot (\dim dx) = (\dim f) \cdot (\dim X) = 1,$$

siis saamegi siit tulemuseks

$$\dim f = (\dim X)^{-1}.$$

5.1.7. Meetermõõdustiku ajaloost

Prantsuse revolutsiooni ajal 1790–1799 loodi Prantsuse TA erikomisjoni (Borda, Condorcet, Laplace, Monge) poolt kümnendsüsteemile tugineva meetermõõdustiku ühikud – “kõikideks aegadeks, kõigile inimestele, kõikide riikide jaoks” (*pour tous les temps, pour tous les peuples, pour tous le pays*). Algselt valiti meetermõõdustiku põhiühikuteks meeter, sekund, kilogramm, liiter.

meeter – pr. k. *mètre*, kr. k. *metron* – mõõt

Prantsusmaal on meetermõõdustik kohustuslik aastast 1840. Aastal 1875 kirjutasid 17 riiki alla meetrikonventsioonile. Selle alusel otsustati valmistada meetri ja kilogrammi etalonid ja kutsuda iga kuue aasta järel kokku kaalude ja mõõtude peakonverents otsuste vastuvõtmiseks ning edaspidise töö arendamiseks metroloogia alal. Esimene konverents toimus aastal 1889.

Briti impeeriumis ja USA-s seadustati meetermõõdustik 1897, NSVL-s 1925, Eestis 1929.

Ometi on praeguseni kasutusel (näit Inglismaal ja USA-s) arhailistena tunduvaid ühikuid: pikkuse mõõtühikutena *tollid, jalad, jardid, kaabeltaud, miilid*, mahu mõõtühikutena *gallonid ja barrelid*, massi mõõtühikutena *karaadid, untsid, naelad, puudad* jne. Paljud neist ühikutest on jätkuvalt kasutuses ülemaailmselt: *toll* torutehnikas, *karaat* ja *unts* vastavalt vääriskivide ja -metallide kaalumiseks, *miil* ja *sõlm* merenduses, *barrel* naftaäris, *puud* teraviljatootmises, jne.

Meetermõõdustiku põhiühikute ajaloost. Prantsusmaa rahvuskogu dekreet kuulutas 1791 seaduslikuks pikkusühikuks ühe kümnemiljondiku Pariisi veerandmeridiaani pikkusest. Prantsuse TA erikomisjon korraldas 1792–1799 meridiaanikaare pikkuse mõõtmise Dunkerque’ist Barcelonani. 1799 valmistati platinast lihtne latikujuline esimene meetri etalon, nn *arhiivimeeter*, seda säilitatakse Prantsuse Riigiarhiivis. Hiljem selgus, et puhtast platinast valmistatud etalon on vähestabiilne [vähese jäikusega, suure soojuspaisumisega] ning et selle pikkus on 0.09 mm (hilisemate arvutuste järgi 0.2 mm) võrra väiksem definitsiooniga määratud pikkusest. Seepärast korrigeeriti meetrit ja valmistati aastatel 1875–1879 plaatina (90 %) ja iriidiumi (10 %) sulamist 31 uut X-kujulise ristlõikega etaloni pikkusega 102 cm. Iga etalon paiknes rullikutel ja meeter oli tähistatud kahe kriipsuga. Uutest etalonidest täpseima (selle pikkus ühtis kõige täpsemalt arhiivimeetri pikkusega) kinnitas kaalude ja mõõtude I peakonverents 1889. a meetri rahvusvaheliseks prototüübiks. Ülejäänud etalonid jaotati loosiga rahvusvahelise meetrikonventsiooniga ühinenud riikide vahel.

Samas on selge, et mõõtetehnika arenedes võib metallist (või mistahes muust materjalist) etaloni ja selle prototüüpide suhtes selguda üha enam puudusi. Ei ole ka kindel etaloni füüsiline säilimine.

Selgus veel, et etaloni looduslik alus, Pariisi meridiaan, ei ole konstantne. Planeet Maa kui geoiidi kuju muutub Kuu ja Päikese külgetõmbe mõjul. Etalonide taasvalmistamise seisukohast on otstarbekas defineerida pikkusühik mingi sobivama loodusliku konstandi kui Pariisi meridiaan kaudu. Praegusel tehnoloogilisel tasemel peetakse sobivaimateks konstantideks valguse lainepikkusi ja valguse leviku kiirust vaakuumis.

1960. a kinnitas kaalude ja mõõtude XI peakonverents meetri uue definitsiooni:

meeter võrdub krüptooni isotoobi $^{86}_{36}\text{Kr}$ tasemete $2p_{10}$ ja $5d_5$ vahelisel siirdel vaakuumis kiirguva valguse 1 650 763.73 lainepikkusega.

Definitsiooni uuendas kaalude ja mõõtude XVII peakonverents 1983. a:

meeter võrdub vahemaaga, mille valgus läbib vaakuumis 1/299 792 458 sekundiga (s.o valguse kiirusega).

Kaaluühik defineeriti esmalt *grammina* (*massi* nimetati tol ajal *kaaluks*, *kaalu* asemel tarvitati mõistet *raskusjõud*). Grammi esmaseks etaloniks oli 1 cm³ puhast vett jää sulamistemperatuuril. Mitmel põhjusel [peamiselt miniatuursusest tingitud suurest suhtelisest ebatäpsusest] veenduti üsna kiiresti grammi ebasobivuses. Mõõtühikute kohta käivas kirjanduses harilikult ei mainitagi grammi kasutamist etalonina (erandiks on prof H. Tammeti monograafia “Füüsika praktikum. Metroloogia”, Valgus, 1971).

Järgnevalt defineeriti kilogramm kaaluühikuna kui 1 liitri puhta vee kaal 4 °C juures. Esimene kilogrammi etalon (arhiivikilogramm) valmistati 1799. a plaatinast, seda säilitatakse (koos arhiivimeetriga) Prantsuse Riigiarhiivis.

Seoses meetri korrigeerimisega oleks olnud vaja korrigeerida ka liitrit, esialgu seda ei tehtud, mistõttu liiter ning dm³ ei langenud mõni aeg kokku. Kilogramm defineeriti jätkuvalt liitri kaudu. Seejärel korrigeeriti ka liitrit, mistõttu praegu langevad liiter ja dm³ jälle kokku.

Aastal 1899 valmistati plaatina (90 %) ja iriidiumi (10 %) sulamist silindrikujulised (läbimõõt ja kõrgus *ca* 39 mm) arhiivikilogrammi koopiad, millest täpseimat säilitatakse rahvusvahelise etalonina (prototüübina) Pariisi lähedal Sevres’*s* Rahvusvahelises Kaalude ja Mõõtude Büroos.

Hilisematel mõõtmistel selgus, et 1 dm³ puhta vee kaal temperatuuril 4 °C on 0.999972 kg. Seega kerkis küsimus, kas muuta kilogrammi definitsiooni ja valmistada uus etalon või lugeda kilogrammiks juba valminud etaloni massi. Uus definitsioon tähendanuks paljude kasutuses olevate konstantide korrigeerimist ja sellega seonduvaid segadusi. Lihtsam oli jääda olemasoleva kilogrammi juurde. Uut looduslikku konstanti, analoogselt pikkusühikuga, pole massi jaoks leitud. Praegusel hetkel on massi 1 kg etaloniks rahvusvahelise kilogrammi etaloni mass (ilma loodusliku vasteta).

Ajauhiku *sekund* defineerimisel lähtuti juba Babüloonias väljakujunenud ööpäevasest kellakasutusest, mille järgi ööpäev jaguneb tundideks, minutiteks ja sekunditeks.

Aastani 1956 defineeriti sekund kui 1/86400 osa keskmisest päikeseööpäevast (86400 = 12×60×60).

NB! Peale päikeseööpäeva on veel täheööpäev, mis on pisut lühem, kuna tähtedelt vaadatuna teeb Maa aastas ühe pöörde rohkem.

sekund – lad. k. *secundus* – teine

Astronoomiatehnika arenedes selgus, et troopiline aasta lüheneb sajandis ca 0.5 s [tõusu-mõõna tõttu ookean “loksub”, mis analoogselt hõõrdumisega aeglustab Maa liikumist, kiiruse vähenemise tõttu väheneb tsentrifugaaljõud ja väheneb Päike–Maa kaugus, väiksem orbiit läbitakse kiiremini]. Kuna aasta osutus olevat aja t funktsiooniks, siis leiti lahendus aasta defineerimises ühel konkreetsel ajahetkel. Selleks hetkeks valiti 31. detsembri 1899 keskpäev. Sekund defineeriti kui $1/31\,556\,925.9747$ osa *troopilisest aastast* 31.12.1899 kell 12.00. See definitsioon kehtis 1956–1967. (Troopiliseks aastaks nimetatakse ajavahemikku Päikese keskpunkti kahe järjestikuse kevadpunktist läbimineku vahel.)

Aatomifüüsika areng võimaldas veelgi paremat looduslikule konstandile tuginevat sekundi definitsiooni:

sekund on võrdne ^{133}Cs aatomi põhiseisundi kahe ülipeenstruktuurinivoo vahelisele siirdele vastava kiirguse 9 192 631 770 perioodiga.

5.2. Mõõtevead ja mõõtemääramatus

Oletame, et meil on teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t (tegelikult muidugi ei ole teada, aga mõttelise eksperimendi korras võib nii oletada). Mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$ on **mõõtmistulemuse viga** (kasutatakse ka pikemat terminit *ühekordse mõõtmise konkreetne mõõteviga*). Vead jagunevad **süsteematilisteks** ja **juhuslikeks**.

5.2.1. Süsteematilised vead

Süsteematilised vead liigitatakse:

1. Vead, mille põhjused on teada ja millede suurusi on võimalik piisavalt täpselt määrata.

Näiteks

- testri 0 võib olla paigast ära
- keha massi määramisel üleslükkejõu arvestamata jätmine
- termomeetri skaala võib olla nihkes.

Võimaluse korral tuleb seda liiki vead kindlasti kõrvaldada või äärmisel juhul arvesse võtta parandite abil. Teadaoleva (aditiivse) süsteematilise vea arvestamisel saame mõõtmistulemuse parandatud väärtuseks $\tilde{x} = \bar{x} + q$, kus q on aditiivsest süsteematilisest veast tingitud parand. Aditiivne viga ei sõltu mõõtmistulemuse väärtusest.

Mõnikord võib meil tegemist olla ka multiplikatiivse veaga, s.t veaga, mis kasvab võrdeliselt mõõtmistulemuse kasvuga. Sellisel juhul tuleb parandatud mõõtmistulemuse saamiseks mõõtmistulemus parandusteguriga läbi korrutada $\tilde{x} = Q \cdot \bar{x}$, kus Q on multiplikatiivset süsteematilist hälvet arvestav parandustegur.

Nihkes skaalaga seadmete kasutamiseks lisatakse taatlemisel seadme dokumentatsioonile parandite tabel, kust saab leida vajaliku väärtuse parandi (või parandusteguri) jaoks.

2. Vead, millede põhjused on teada, kuid suurused mitte.

Siia alla käivad kõik riistavead. Need on põhjustatud ebatäpsest gradueerimisest. *Nagu edaspidi näeme on siin sisuliselt tegu B-tüüpi (mõiste täpsustame edaspidi) mõõtemääramatusega ja seda viga saab iseloomustada mõõtemääramatuse abil. Põhimõtteliselt aga saab sellisest süsteematilisest veast ka vabaneda, kui kontrollida mõõteriista mõne teise tunduvalt täpsema mõõteriistaga ja koostada vastava parandite tabeli.*

3. Vead, millede olemasolu on meile teadmata.

Sellised vead võivad esineda juhtudel, kui kasutatakse uut mõõtmismeetodit või kui on tegemist äärmiselt keeruliste mõõtmistega. Kui vea olemasolu on mõõtjale teadmata, siis selline viga jääb mõõdetud suuruse väärtusesse paratamatult sisse.

Teadmata süstemaatiline viga võib esineda ka küllalt lihtsatel juhtudel. Olgu näiteks vaja määrata mingi materjali elektrijuhtivust. Selleks mõõdetagu sellest materjalist tehtud traadi takistust. Kui traadis on mingi varjatud materjalidefekt (pragu, ebahomogeenne koht), siis takistuse väärtus tuleb süstemaatiliselt vale.

Teadmata süstemaatilise veast saab vabaneda randomiseerimise teel, milleks püütakse süstemaatiline hälve muuta osaliselt või täielikult juhuslikuks. Traadi näite puhul tuleks mõõta paljude traaditükkide takistus ja leida nende keskvärtus. Kui aga viga on väga suur, siis ei ole randomiseerimist vajagi, piisab kui fikseerime vigase traadi (mille takistus osutus näiteks ülejäänutest erinevaks 10 korda) ja jätame selle edasisest mõõtmisest kõrvale.

5.2.2. Juhuslikud vead. Mõõdetava suuruse statistiline hinnang

Lisaks süstemaatilisele veale on mõõtmistulemusel alati ka juhuslik komponent. Tingituna suurest hulgast mitmesugustest, üldjuhul välistest, s.o mõõtja kontrollile mitte alluvatest teguritest on üksikmõõtmise tulemus juhuslik suurus:

Ükskõik kui hoolikalt me ka ei mõõdaks üht ja sama detaili, me saame erinevatel sõltumatutel mõõtmistel erineva tulemuse. See erinevus võib olla väga väike, kuid ta on põhimõtteliselt alati olemas. **Peamised juhuslikkuse allikad on välised tegurid, mõõdetava objekti enda muutlikkus ja mõõtmisi teostava isiku oskused ja kogemustepagas.** Seetõttu on mõõdetava suurus juhuslik suurus X ja iga mõõtmistulemus (iga üksikmõõtmine) on selle juhusliku suuruse realisatsioon x . Vaatame alustuseks taas hüpoteetilist situatsiooni, kus meil on apriorselt teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus x_t . X juhuslikkuse tõttu mõõtmistulemuse x ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe $\Delta x = x - x_t$, s.o mõõtmistulemuse viga, erineb nullist. Tehes nüüd palju kordi mõõtmisi, kokku N sõltumatut mõõtmist, saame juhusliku suuruse X valimi $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_{N-1}, x_N\}$. Selle valimi aritmeetiline keskvärtus (vt punkt 3.8)

$$\bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \quad (2.1)$$

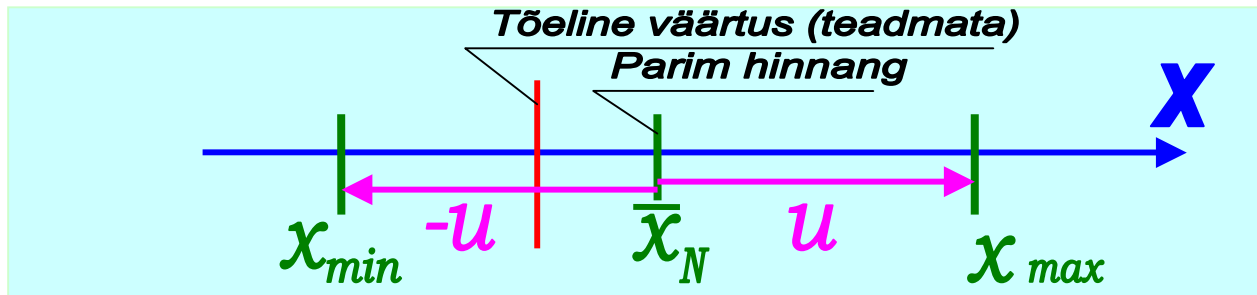
on parim lähend tõelisele väärtusele piirväärtuse mõttes (NB! *idealiseeritud eeldusel, et muid veaallikaid – süstemaatilist viga, teadmata viga vms – ei esine!*)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x}_N = x_t. \quad (2.2)$$

Et mõõtmisi on alati lõplik hulk (N on alati lõplik), siis tegelikult me ei saa kunagi teada tõelist mõõdetava suuruse väärtust ja me peame alati piirduma ligikaudse statistilise hinnanguga \bar{x}_N . See statistiline hinnang võetakse mõõdetava suuruse parimaks hinnanguks.

5.2.3. Mõõtemääramatus

Niisiis, meil pole teada mõõdetava suuruse tõeline väärtus (kui oleks, siis poleks mõõtmised tarvilikud) ning seda tõelist väärtust ei anna ka suure arvu kordusmõõtmiste keskmistamine. **Maksimum, mida saab nõuda, on mõõtmistest leitud mõõdetava suuruse mingi arvatav parim hinnang – näiteks kordusmõõtmistel on selleks aritmeetiline keskmine – ning teatav intervall selle parima hinnangu ümber, millesse etteantud usaldusnivooga kuulub mõõdetava suuruse tõeline väärtus.** Seega, mõõtmistulemuseks ei ole mitte punkt arvsirgel, vaid mõõtmistulemuseks on lõplik lõik reaalteljel, mis määrab mõõdetava suuruse võimalike väärtuste diapasooni. Olukorda illustreerib joonis 2.1.



Joonis 2.1

Võimalike väärtuste diapasooni võib anda algus- ja lõpp-punktiga x_{\min} ja x_{\max} . Tavalisem ja levinum on siiski anda **lõigu keskpunkt**, milleks valitakse mõõdetava suuruse parim hinnang \bar{x}_N ning **lõigu poollaius** u , $u(x)$. Seda poollaiust u nimetatakse **mõõtemääramatuseks** (mõõtemääramatuse tähis u on tulnud ingliskeelse termini uncertainty esitähdest, sulgudes näidatakse vajadusel suuruse tähis X).

Mõõtemääramatus on mõõtmistäpsuse mõõduks: mida suurem on lõigu poollaius u , seda väiksem on mõõtmistäpsus. Enamasti on mõõtmistel statistiline iseloom ning koos mõõtemääramatusega on tarvis anda ka **usaldusnivoo** $p(u)$, millega mõõdetav suurus **usaldusintervalli** $[\bar{x}_N - u(x), \bar{x}_N + u(x)]$ satub. **Mõõtmine on korrektselt sooritatud, kui on leitud kolm arvu:** \bar{x}_N , $u(x)$ ja $p(u)$.

Mõõtmisteooria ülesandeks on põhjendada ja anda eeskirjad parima hinnangu \bar{x}_N , mõõtemääramatuse $u(x)$ ja usaldusnivoo $p(u)$ leidmiseks.

Uue standardi järgi on oluline erinevus määramatuse ja mõõtmisvea mõistete vahel:

Määramatus \neq viga.

Viga on mõõtmistulemuse ja mõõdetava suuruse tõelise väärtuse vahe, on seega juhusliku suuruse konkreetne realisatsioon.

Mõõtemääramatus peegeldab seda, et meil puuduvad täpsed teadmised mõõtesuuruse väärtuste kohta. Ka pärast teadaolevate süstemaatiliste mõõtehälvete kõrvaldamist on mõõtmistulemus ikkagi vaid mõõtesuuruse väärtuse hinnang, ja seda määramatuse tõttu, mis on tingitud juhuslikust mõõteveast ja süstemaatiliste mõõtevigade “mittetäielikust” korrigeerimisest.

Mõõtmistulemus võib osutada väga lähedaseks mõõtesuuruse väärtusele (mida pole küll võimalik täpselt teada), kuid samal ajal võib sellel mõõtmistulemusel olla üsna suur määramatus.

Mõõtmistulemuse määramatus koosneb paljudest komponentidest, mis jagatakse **kahte tüüpkategooriasse**:

A- tüüpi määramatus, mida hinnatakse statistiliste meetodite abil

B- tüüpi määramatus, mida hinnatakse muul viisil.

Nende kahe põhitüübi koosmõjul tekkiv mõõtemääramatus kannab nime

Liitmääramatus.

Kasutatakse veel ka standardmääramatuse mõistet. Standardmääramatus on standardhälbe kujul väljendatud mõõtmistulemuse määramatus.

Määramatuse komponentide A ja B gruppi jagamise eesmärgiks on nende hindamise kahe erineva viisi rõhutamine, mitte aga erineval viisil saadud komponentide iseloomu erinevuse näitamine. **Mõlemad hinnangud põhinevad tõenäosusjaotusel ja mõlemal viisil saadud määramatuse komponendid esitatakse dispersioonhinnangu või standardmääramatuse (standardhälbe hinnangu) abil.** Põhiline ja oluline erinevus on selles, et **A-tüüpi mõõtemääramatus saadakse vahetult mõõtmistulemustest nende statistilise töötluse tulemusel, kuna B-tüüpi mõõtemääramatuse leidmisel kasutatakse kaudsel viisil hangitud/teadaolevat tõenäosuslikku informatsiooni.** (Näiteks on teada, et mõõteriista viga on jaotunud ühtlase seaduse kohaselt.)

Järgnevas vaatleme A- ja B-tüüpi määramatuse ning liitmääramatust lähemalt.

5.2.4. A-tüüpi mõõtemääramatus

A-tüüpi mõõtemääramatus on **statistilist tüüpi** mõõtemääramatus, mille suurust saab vähendada mõõtmiste arvu suurendades, kordusmõõtmisi sooritades ja tulemusi keskmistades. A-tüüpi mõõtemääramatus on tekitatud juhuslike mõjurite poolt, mis võivad kallutada mõõtmistulemust kord ühele, kord teisele poole, suurendada ja vähendada üksikmõõtmist. A-tüüpi määramatuse põhjustavad: 1) mitmesugused häirivad tegurid mõõtmisel (näit välistingimused), 2) objekti enda muutlikkus (nii valmistamise ebatäpsus kui objekti ajaline muutumine), jne.

Näide 1. Stomatoloogiakabinetis kaalutakse hambakulda. Kabinet paikneb vanas majas, kus põrand pisut kõigub, kui seda mööda kõndida. Tundlikke kaale on raske tasakaalustada. Iga mõõtmine annab isesuguse tulemuse.

A-tüüpi mõõtemääramatuse hindamine toimub nii nagu juhusliku suuruse statistilisel hindamisel. Seda oleme juba üsna põhjalikult kirjeldanud punktis 3.7. A-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on

$$u_A.$$

Niisiis, tehakse N mõõtmist ja leitakse aritmeetiline keskmine (**mis ühtlasi võetakse ka mõõdetava suuruse parimaks hinnanguks, kui seda ei ole vaja täiendavalt korrigeerida teadaoleva suurusega süstemaatilise vea tõttu**)

$$x_t \approx \bar{x}_N = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

Seejärel hinnatakse mõõdetud suuruse **aritmeetilise keskmise standardhälve** valemiga (punkt 3.9, valem (9.7)):

$$u_N = u(\bar{x}_N) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}.$$

Kui mõõtmiste arv on piisavalt suur (praktiliselt $N > 30$), siis võib selle standardhälbe võtta standardmääramatuseks, sest sel juhul on \bar{x}_N ja u_N piisavalt lähedased juhusliku suuruse tõelisele keskväärtusele ja aritmeetilise keskmise tõelisele standardhälbele $\sigma(\bar{x}_N)$. Eeldades, et üksikmõõtmised on jaotunud normaalselt, saame kasutada normaaljaotuse usaldusnivoode arvutuseeskirja ehk teiste sõnadega: **võime rakendada normaaltesti**. Võime väita, et usaldusnivooga 0.68 (68 %) on mõõdetava suuruse tegelik väärtus x_t vahemikus $[\bar{x}_N - u_N, \bar{x}_N + u_N]$, usaldusnivooga 0.95 (95 %) vahemikus $[\bar{x}_N - 2u_N, \bar{x}_N + 2u_N]$, usaldusnivooga 0.997 (99.7 %) vahemikus $[\bar{x}_N - 3u_N, \bar{x}_N + 3u_N]$ jne.

Väikeste N -ide korral aga on u_N süstemaatiliselt väiksem $\sigma(\bar{x}_N)$ -ist, s.t normaaltest annab iga usaldusnivoo korral süstemaatiliselt alla hinnatud usaldusintervalli pikkuse.

Studenti test

Põhjus on selles, et nii \bar{x}_N kui ka u_N on mõlemad tegelikult juhuslikud suurused ja ei ole rangelt võttes ei tõeline keskväärtus ega aritmeetilise keskmise tõeline standardhälve (kuigi nad on nendele suurustele lähedased, sest nende hajuvus on väike). Inglise teadlane Student, *alias* W.S. Gosset tõestas:

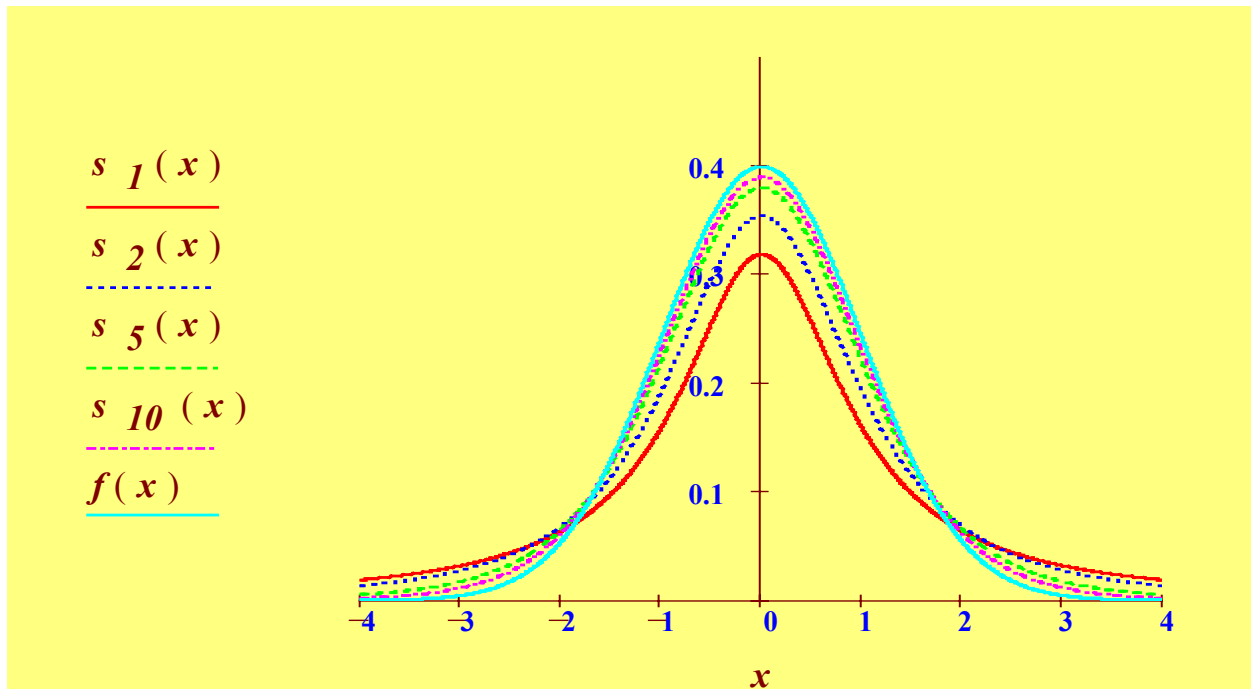
Kui X on normaalne juhuslik suurus, siis juhuslik suurus

$$T = \frac{\bar{x}_N - m[X]}{u(\bar{x}_N)} \quad (2.3)$$

allub jaotusele tihedusega

$$s_{N-1}(t) = C_{N-1} \left(1 + \frac{t^2}{N-1}\right)^{-N/2}. \quad (2.4)$$

Siin C_{N-1} on normeerimistegur. Jaotust (2.4) nimetatakse ($N-1$ vabadusastmega) **Studenti jaotuseks**. Studenti jaotus erinevate $N-1$ väärtuste korral on toodud joonisel 2.2, millelt on ka näha, kuidas see funktsioon vabadusastmete arvu kasvades läheneb standardiseeritud normaaljaotusele.



Joonis 2.2. Ühe, kahe, viie ja kümne vabadusastmega Studenti jaotus $s_{N-1}(x)$ ning standardiseeritud normaaljaotus $f(x)$.

Studenti jaotuse oluline omadus on, et juhusliku suuruse T jaotusfunktsioon $s_{N-1}(t)$ sõltub vaid ühest parameetrist (nn vabadusastmete arvust) $N - 1$ ja ei sõltu üldse juhusliku suuruse (mõõdetava suuruse) X konkreetsest dispersioonist ega keskvärtusest (küll on aga oluline X normaalsus). Selles mõttes on tegu universaalfunktsiooniga, mis iseloomustab suvaliste ühesuguse normaaljaotusega juhuslike suuruste summa üldisi omadusi. Otsene järeldus asjaolust, et juhuslik suurus (2.3) allub Studenti jaotusele on, et usaldusnivoole p vastav mõõtmistulemuse paiknemise intervall on esitatav kujul

$$P[\bar{x}_N - t_{N-1}(p)u(\bar{x}_N) < x < \bar{x}_N + t_{N-1}(p)u(\bar{x}_N)] = p. \quad (2.5)$$

Siin suurus $t_{N-1}(p)$ on (Studenti) **t -kordaja** (usaldusnivoo p ja $N - 1$ vabadusastme korral). t -kordaja on samuti ainult ühest parameetrist N sõltuv universaalne usaldusnivoo funktsioon, mis on leitav Studenti jaotusest. Tavaliselt antakse t -kordaja kindlate p väärtuste jaoks tabuleeritult. Studenti t -kordaja tabuleeritud väärtused on toodud **lisas 1**.

Valemit (2.5) nimetatakse **Studenti testiks**.

t -kordaja abil saab hinnata A-tüüpi mõõtemääramatust antud usaldusnivoo korral avaldisega

$$u_A(p) \equiv u(\bar{x}_N, p) = t_{N-1}(p) \cdot u(\bar{x}_N) = t_{N-1}(p) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}. \quad (2.6)$$

Oleme siin toonud sisse usaldusnivoost sõltuva A-tüüpi mõõtemääramatuse üldtähisena $u_A(p)$ ja $u_A(\bar{x}_N, p)$ erinevalt suurustest u_A ja $u_A(\bar{x}_N)$, millega tähistasime aritmeetilise keskmise

empiirilist standardhälvet. Valemi (2.6) kasutamisel me ei pea teadma mõõdetava suuruse X konkreetseid statistilisi parameetreid. Kõik suurused on leitavad kas otseselt mõõtmistest (suurused x_i) või siis on teada teoreetiliselt (universaalne funktsioon $t_{N-1}(p)$).

Suurte N -ide korral läheb Studenti jaotus üle standardiseeritud normaaljaotuseks. Lisas 1 toodud Studenti t -kordaja tabelist on näha, et näiteks $t_{N-1}(68,3\%) \rightarrow 1$ jne. Erinevus on oluline alas $N < 30$ ja väga oluline alas $N < 10$.

5.2.5. B-tüüpi mõõtemääramatus

Laias laastus on B-tüüpi mõõtemääramatus igasugune mõõteprotsessis ilmnev määramatus, mis ei ole statistiliselt (s.o üle mõõtmiste keskmistades) vähendatav. B-tüüpi mõõtemääramatuse tähis on

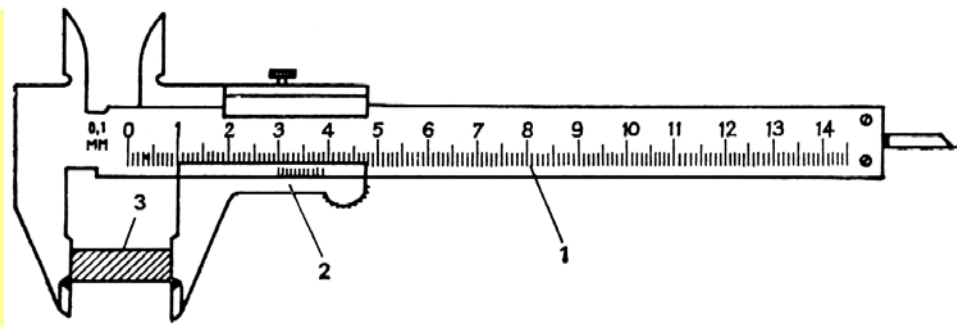
$$u_B.$$

Esmajoones kuuluvad B-tüüpi mõõtemääramatuse alla vead, mis on tingitud mõõteinstrumendi piiratud võimalustest. Kui hoolikalt ja täpselt ka poleks valmistatud mõõteriist või mõõtevahend, millega me mõõtmist teostame, alati on ka sellel olemas mingi (juhuslikku laadi) viga, mis on selle konkreetse mõõteriista puhul küll muutumatu ja püsiv suurus, kuid mis muutub ühelt mõõteriistalt teisele samuti juhuslikult. See – mõõteriista viga – on viga etaloni suhtes. Korduvatel mõõtmistel see viga on esindatud täpselt ühel ja samal moel (kuna mõõtmised teeme ühe ja sama mõõteriistaga) ja korduvad mõõtmised tema suurust ei kahanda. Käesoleva kursuses seomegi B-tüüpi mõõtemääramatuse konkreetse riistaveaga.

Näide. Praktikumis kasutatava nihiku (joonis 2.3) põhiviga (ehk riistaviga) on $\Delta_o = 0.05$ mm.

S.t eeldatakse, et mõõteriistast tingitud viga ühekordsel mõõtmisel $\Delta x = x - x_t$ jääb piiridesse

$$-\Delta_o < \Delta x < \Delta_o.$$



Joonis 2.3. Nihik. 1 – põhiskaala; 2 – noonius; 3 – mõõdetav detail. Nihiku põhiviga on kantud mõõteriistale. (Toodud joonisel on see 0.1 mm. Praktikumis kasutakse kaks korda täpsemat riista põhiveaga 0.05 mm.)

Valmistajatehas garanteerib, et mõõteriista tegelik viga ei välju neist piirest.

Üldiselt eeldatakse, et (konkreetselt) mõõteriista viga on jaotunud ühtlaselt lõigul $[-\Delta_o, +\Delta_o]$, s.o mõõteriista viga jaotustihedus on ühtlane jaotus (punkt 2.5) keskvärtusega nullis (lõigu otspunktid on seetõttu $a = -\Delta_o$ ja $b = \Delta_o$) ning standardhõlbega (punkt 3.4)

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b-a}{2} = \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}} = 0,58\Delta_o.$$

See standardhälve võetaksegi B-tüüpi mõõtemääramatuseks:

$$u_B = \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}} = 0,58\Delta_o. \quad (2.7)$$

5.2.6. Liitmääramatus

Mõõtmistulemuse standardmääramatust, mis on saadud A ja B komponentide liitumise tulemusel, nimetatakse **liitmääramatuseks** (*combined uncertainty*). Tema arvuline väärtus võrdub positiivse ruutjuurega liitdispersioonist, mis saadakse kõikide dispersiooni komponentide liitmisel

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (2.8)$$

Eeldatakse, et A ja B tüüpi määramatuse määravad/põhjustavad juhuslikud suurused, mis on vastastikku korreleerimatud (sõltumatud) – ainult sel juhul kehtib dispersioonide liitumise seadus (vt punkt 3.2).

Keerulisemate mõõtmiste korral võib meil olla tegu mitme A-tüüpi komponendiga u_{A1}, u_{A2}, \dots ning mitme B-tüüpi komponendiga u_{B1}, u_{B2}, \dots . Sel juhul

$$u_C = \sqrt{u_{A1}^2 + u_{A2}^2 + \dots + u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + \dots}$$

Näide. Silindri pikkuse mõõtmine nihikuga.

Vaatleme konkreetselt metallsilindri mõõtmist. Oletame, et mõõtsime metallsilindri pikkust $N = 100$ korda. Oletame, et eksperimendist saime saja mõõtmise keskmiseks väärtuseks

$$\bar{x}_N = 76,648 \text{ mm}$$

ja tema standardhälbeks (valem (2.3))

$$u(\bar{x}_N) = 0,044 \text{ mm}.$$

See on statistiliste meetoditega saadud tulemus, s.t tegu on A-tüüpi määramatusega. Et seejuures mõõtmiste arv on piisavalt suur, siis on Studenti t -kordaja siin 1, 2 või 3 vastavalt sellele, kas tahame saada usaldusintervalli poollaiuseks üks, kaks või kolm standardhälvet (usaldusnivooks 68,3, 95,45 või 99,73 %). Usaldusnivoo 68,3% korral on

$$u_A = u(\bar{x}_N) = 0,044 \text{ mm}.$$

Nihiku põhivea $\Delta = 0.05 \text{ mm}$ korral saame B-tüüpi mõõtemääramatuseks

$$u_B = \sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029 \text{ mm}.$$

Järelikult koond- ehk liitmääramatuseks saame

$$u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{0,044^2 + 0,029^2} = 0,053 \text{ mm}.$$

Siin oleme arvesse võtnud juhusliku hälbe ja mõõteriista ebatäpsuse, kuid arvesse võtmata jätnud süstemaatilise hälbe.

Tulemuse esitame kujul

$$\bar{x} = 76,648(0,053) \text{ mm},$$

või

$$\bar{x} = 76,648(53) \text{ mm}$$

või täiuslikumas kirjaviisis

$$\bar{x} = 76,648 \text{ mm}$$

$$N = 100$$

$$p = 68\%$$

$$u_C = 0,053 \text{ mm}$$

$$u_A(\bar{x}) = 0,044 \text{ mm}, \text{ normaaljaotus}$$

$$u_B = 0,029 \text{ mm}, \text{ ühtlane jaotus.}$$

Soovides nüüd anda leppelise tõelise väärtuse jaoks vahemikhinnangut kõrgemal usaldusnivool, kui seda on 68 %, tuleb kasutada **laiendmääramatust**. Laiendmääramatus U saadakse liitmääramatuse läbi korrutamisel katteteguriga k :

$$U = k \cdot u_C.$$

Analoogiliselt Studenti t -kordajaga (vt punkt 5.2.4) ja normaaljaotuse katteteguriga (punkt 3.6) sõltub ka laiendmääramatuse kattetegur k soovitatavast usaldusnivoost. Eeldatakse, et see usaldusnivoo ja katteteguri vaheline sõltuvus on samasugune nagu normaaljaotuse korral: Usaldusnivoo $p = 68\%$ korral on kattetegur $k = 1$, $p = 95\%$ korral on $k = 2$ ja usaldusnivoo $p = 99\%$ korral on $k = 3$.

Praktikumis kasutame mõõtetulemuse esitamiseks usaldusnivood $p = 95\%$. Sel juhul asub leppeline tõeline väärtus tõenäosusega $p = 95\%$ vahemikus $\bar{x} - U \leq x_1 \leq \bar{x} + U$. Seega meie eelmise näite puhul võime öelda, et leppeline tõeline väärtus asub tõenäosusega $p = 95\%$ vahemikus $76,54 \leq x_1 \leq 76,76$ mm, sest $U = 2\sqrt{0,044^2 + 0,029^2} = 0,11$ mm.

5.3. Tähennumbrite hulk määramatuse arvutamisel

Määramatuse hinnang mõõtmiste väikese arvu korral on üsna ebatäpne, seetõttu pole vahemikhinnangu väljakirjutamisel mõtet suurel **tähennumbrite** hulgal (**tähennumbrite hulk e tähendusega numbrikohtade hulk** arvus on *kehtivate kümnendkohtade hulk* arvus). Tulemused esitatakse ümardatult. Arvude ümardamisel kasutatakse reeglit: arvud 1; 2; 3 ja 4 ümardatakse alla, teised üles. Täisarvude ümardamisel kirjutatakse ärajäetud numbrite asemele kordaja 10^m , kus m näitab ärajäetud tähennumbrite hulka.

Näide: $32\,548 \approx 33 \cdot 10^3$.

Tähennumbriteks arvus loetakse alati kõiki numbreid peale nulli. Nulli loetakse kehtivaks, kui ta asub teiste arvude vahel, täisarvu või kümnendmurru lõpus. **Arvu alguses olevaid nulle, samuti ümardamise teel saadud nulle arvu lõpus ei loeta tähennumbriteks.**

Näide: 10 400 5 tähennumbrit.
 $104 \cdot 10^2$ 3 tähennumbrit.
 10 400,00 7 tähennumbrit.
 0,01040 4 tähennumbrit.

Mõõtemääramatus esitatakse kas ühe või kahe tähennumbriga. ISO standardi alusel esitatakse määramatus *täppismõõtmistel* kahe tähennumbri täpsusega ja *tavamõõtmistel* ühe tähennumbri täpsusega. **Kui arvutustel tuleb mõõtemääramatus pikem, siis ümardatakse tulemus vastavalt kas kahe või ühe tähennumbri pikkuseks.**

Näide:

<i>Arvutatud u_c</i>	<i>23751</i>	<i>23,751</i>	<i>0,23751</i>	<i>0,0023751</i>
<i>u_c kahe tähennumbriga</i>	<i>$24 \cdot 10^3$</i>	<i>24</i>	<i>0,24</i>	<i>0,0024</i>
<i>u_c ühe tähennumbriga</i>	<i>$2 \cdot 10^4$</i>	<i>$2 \cdot 10^1$</i>	<i>0,2</i>	<i>0,002</i>

Mõõtmistulemus esitatakse alati määramatuse viimase koha täpsusega.

Näide: Olgu mõõdetud suurus $x = 73,3582768$ ja arvutatud mõõtemääramatus $u_c = 0,0382765$.

Ümardame mõõtemääramatuse kahe tähennumbri pikkuseks: $u_c = 0,038$.

Seega mõõdetud suurus ümardub kujule $x = 73,358$.

Mõõtmistulemuse võime kirjutada kujul

$$x = 73,358(38)$$

või $x = 73,358(0,038)$.

Näide: Olgu mõõdetud $x = 100,3476$ ja $u_c = 0,5246$.

Ümardame mõõtemääramatuse ühe tähennumbri pikkuseks: $u_c = 0,5$.

Seega mõõdetud suurus ümardub kujule $x = 100,3$.

Mõõtmistulemuse võime kirjutada kujul

$$x = 100,3(5)$$

või $x = 100,3(0,5).$

5.4. Mõõtevahendid ja nende lubatud vigade normeerimine

Mõõtevahendid on tehnilised vahendid, millel on normeeritud metrooloogilised omadused ja mis on ette nähtud mõõtmiseks.

Mõõtevahendid jaotatakse viide rühma:

1. mõõdud:
 - üheväärtuselised mõõdud, näiteks kaaluvihid
 - mitmeväärtuselised mõõdud, näiteks joonlauad, takistussalved
2. mõõteriistad (mõõturid)
3. mõõtemuundurid
4. abimõõtevahendid
5. mõõtesüsteemid või -kompleksid või seadeldised.

Mõõdud on seadeldised mingi füüsikalise suuruse reprodutseerimiseks. Näide: kaaluvihid.

Mõõteriist on mõõtevahend, mis võimaldab saada mõõteandmeid vaatlejale vahetult tajutaval kujul. Näide: osutmõõteriistad, klaas-vedelik termomeetrid.

Mõõtemuundur on ette nähtud mõõteinfo saamiseks, muundamiseks, edastamiseks ja pole varustatud vahendiga vaatlejale vahetu info saamiseks, kuna puudub näiduseadis. Näide: mõõtevõimendid. Mõõtemuundurite eriliigiks on andurid esmase mõõteinfo saamiseks. Näide: termopaar, niiskusemõõtja mahtuvuslik andur.

Abimõõtevahendid on seadmed, millega kontrollitakse mõõteriista töötingimusi, füüsikalisi mõjureid jne. Näiteks kuivelemendi elektromotoorjõu määramise töös kasutatakse normaalelementi elektromotoorjõu standardi reprodutseerimiseks, mõõtmised ise tehakse aga potentsiomeetri sisese pingeallikaga.

Mõõtesüsteem on mitmest eelpoolmainitud mõõtevahendist koostatud seadeldis.

Iga mõõtevahendi juurde kuulub pass ja rida dokumente, mis normeerivad

- mõõtepiirkonna
- mõõtediapasooni
- tundlikkuse
- mõõtevea jne.

Mõõtevahenditele on kehtestatud lubatud mõõtevead. Kõige tähtsam nendest on põhiviga. **Põhiviga on maksimaalselt lubatud viga normaaltingimustel.** Universaalseid normaaltingimusi ei ole, need kehtestatakse individuaalselt igale mõõteriistale (temperatuuri-, niiskuse-, õhurõhu-, toitepinge vahemik jne). Näiteks etalonnormaallemendi puhul on lubatud temperatuurivahemik $(23,000 \pm 0,005) ^\circ\text{C}$. Tavalistel seadmetel on see $20 ^\circ\text{C}$ või $23 ^\circ\text{C}$ ümbruses $\pm 0,1$ kuni $\pm 5 ^\circ\text{C}$.

Absoluutviga tähistatakse Δx ning defineeritakse *mõõdu puhul* valemiga

$$\Delta x = x - x_t,$$

kus x on **nominaalväärtus (mõõdetud väärtus)** ja x_t **leppeline tõeline väärtus**, ja **mõõteriista puhul** valemiga

$$\Delta x = x_{\text{nait}} - x_t,$$

kus x_{nait} on **mõõteriista näit**.

NB! Paneme tähele, et Δx on siin märgiga suurus – ta võib olla nii negatiivne kui positiivne.

Suhtviga defineeritakse valemiga

$$\delta \equiv \delta x = \frac{\Delta x}{x_t} \cdot 100\%.$$

Taandviga defineeritakse valemiga

$$\gamma \equiv \gamma x = \frac{\Delta x}{x_{\text{norm}}} \cdot 100\%,$$

kus x_{norm} on **normeeriv väärtus** (võib olla näiteks mõõtepiirkonna ülemine piir või skaala pikkus).

Lühendatud tähiseid δ, γ kasutame arvutustes, pikemad tähised $\Delta x, \gamma x$ on vajalikud siis, kui tahame rõhutada või vahet teha, millise konkreetse füüsikalise suuruse veaga on tegemist.

NB! Ka δ ja γ on märgiga suurused!

Mõõtevahendi täpsusklass on mõõtevahendi üldistatud karakteristik, mis määrab tema suurima lubatava põhi- ja lisavea, aga samuti teised täpsust mõjutavad omadused vastavalt mõõteliikidele kehtestatud standardile.

Selleks üldistatud karakteristikuks võib olla:

1. Absoluutpõhiviga $\Delta_0, \Delta_0 x$. Definiitsiooni kohaselt on absoluutpõhiviga alati positiivne suurus, seejuures eeldatakse, et mõõdetav suurus satub intervalli $[-\Delta_0, +\Delta_0]$. Kasutatakse peamiselt mõõtude puhul.

Näide. Esimeses praktikumi töös kasutatava nihiku absoluutpõhiviga on 0,05 mm.

Näide. Kaaluvihid klassifitseeritakse viide täpsusklassi. Kasutatud klassile vastavad absoluutpõhivea väärtused leitakse vihtide komplekti tehnilisest dokumentatsioonist. Füüsika praktikumis kasutatavate vihtide jaoks võib absoluutpõhivead leida käesoleva loengukonspekti **lisast 2** või raamatutest [1 ja 2, vt kirjanduse loetelu].

Näide: Olgu meil keha kaalumiseks vaja kolme vihti – 1 kg, 50 g ja 2 g. Kasutades selle keha kaalumiseks 3. klassi vihte, saame põhiveaks

$$\Delta_0 m = \sqrt{12^2 + 3^2 + 0,6^2} = \sqrt{153} = 12,4 \text{ mg}.$$

B-tüüpi määramatuse jaoks saame 95%-sel usaldusnivool $u_B = \frac{2 \cdot 12,4}{\sqrt{3}} = 14 \text{ mg}$.

Mõõtmistulemuse võime nüüd esitada kujul $m = 1052,000(14) \text{ g}$.

Kaaludes sama keha 4. klassi vihtidega, saame põhiveaks

$$\Delta_o m = \sqrt{120^2 + 30^2 + 6^2} = \sqrt{15300} = 124 \text{ mg}.$$

Märkus: Kaalumisel tuleks alati kasutada võimalikult vähe, s.t võimalikult suuri vihte. Viimase väite illustreerimiseks arvuta ise kaaluvihide viga juhu jaoks, kus keha kaalumiseks kasutati kümnet 100 g-list, ühte 50 g-list ja ühte 2 g-list vihti.

2. Suhtpõhiviga $\delta_o \equiv \delta_o x = \frac{\Delta_o x}{x_t} 100 \%$. Kui täpsusklass on suhtpõhivea kujul, siis on

seadme esipaneelile või skaalale kantud täpsusklassi tähis (= suhtpõhivea väärtus) ringi sees. Klasside tähised on siin informatiivsed.

3. Taandpõhiviga $\gamma_o \equiv \gamma_o x = \frac{\Delta_o x}{x_{\text{norm}}} 100 \%$. Rõhuva enamuse osutmõõteriistade puhul

on kasutusel see karakteristik. Seadme esipaneelile või skaalale on kantud täpsusklassi tähis (= taandpõhivea väärtus) ilma ringita. Näiteks 0,5 või 1,0 jne. Kasutusel on täpsusklasside rida $(1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0) \cdot 10^n$, kus $n = 1; 0; -1; -2; \dots$

Näide. Oletame, et mõõtsime voltmeetriga alalispinge väärtuseks $U = 587,2 \text{ V}$. Voltmeetri klass olgu 0,5 ja skaala ulatus $U_{sk} = 1000 \text{ V}$. Sel juhul avaldame esmalt taandpõhivea

valemist absoluutpõhivea $\Delta_o U = \frac{\gamma_o U_{sk}}{100}$ ja seejärel leiame B-tüüpi määramatuse 95%-sel usaldusnivool valemist

$$u_B = \frac{2 \cdot \Delta_o U}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \gamma_o \cdot U_{sk}}{100 \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 1000}{100 \cdot \sqrt{3}} = 5,8 \text{ V}.$$

Mõõtmistulemuse võime nüüd esitada kujul $U = 587,2(5,8) \text{ V}$.

4. Konstandid e ja f kujul e/f taandpõhivea arvutamiseks valemist:

$$\gamma_o = \left[e + f \left(\frac{x_{\text{norm}}}{x_{\text{nait}}} - 1 \right) \right], \%$$

Näide. Oletame et mõõtsime arvvoltmeetriga vahelduvpinge efektiivväärtuseks $U_{\text{nait}} = 15,080 \text{ V}$. Olgu voltmeetri täpsusklass esitatud kujul 0,05 / 0,02 ja oletame, et kasutasime voltmeetri piirkonda $U_{sk} = 20 \text{ V}$. Sel juhul avaldame esmalt taandpõhivea valemist absoluutpõhivea

$$\Delta_o U = \frac{\gamma_o U_{sk}}{100} = \left[0,05 + 0,02 \cdot \left(\frac{20}{15,080} - 1 \right) \right] \cdot \frac{20}{100} = 0,0113 \text{ V}$$

ja seejärel leiame B-tüüpi määramatuse 95%-sel usaldusnivool valemist

$$u_B = \frac{2 \cdot \Delta_o U}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0,0113}{\sqrt{3}} = 0,013 \text{ V}.$$

Mõõtmistulemuse võime nüüd esitada kujul $U = 15,080(13) \text{ V}$.

NB! Mõnikord antakse analoogilise valemiga ka mõõteriista suhtpõhiviga. Seetõttu tuleb alati seadme passist lugeda, mis veaga on tegemist.

5. Täpsusklass detsibellides $kl = 20 \log \frac{\Delta_o x}{x_t}$, dB.

Näide. kl 0.5 dB.

6. Absoluut- ja suhtvea kombinatsioon. Mõnikord kasutatakse *digitaalsete mõõteriistade* täpsusklassi esitamisel kombinatsiooni absoluutveast ja suhtelisest veast.

Näide. Digitaalse multimeetri viga antakse kujul

$$\text{Täpsus} = 0,25 \% \text{ rdg} + 2D.$$

Selline esitusviis on praegu digitaalsete riistade puhul kõige levinum.

Sellist esitust tuleb mõista järgmiselt: Lugemi absoluutpõhiviga on 0,25 % lugemist pluss lugemi viimase kehtiva koha kaks ühikut.

Oletame, et saime multimeetriga mõõtes pinge väärtuseks $U = 6,25 \text{ V}$. Siis absoluutpõhiviga

$$\Delta_o = \frac{0,25}{100} \cdot 6,25 \text{ V} + 0,02 \text{ V} = 0,016 \text{ V} + 0,02 \text{ V} \approx 0,04 \text{ V}.$$

5.5. Mõõtmistulemuse mõõtemääramatus mitme sisendsuuruse korral

Probleemi püstitus. Olgu mõõdetud K füüsikalist suurust X_1, X_2, \dots, X_K (nn sisend-suurused), s.t olgu meil teada igäihe keskväärtused

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K$$

ja liitmõõtemääramatused

$$u(X_1), u(X_2), \dots, u(X_K).$$

Olgu füüsikaline suurus Y (nn väljundsuurus) funktsioon sisendsuurustest X_1, X_2, \dots, X_K :

$$Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_K).$$

Küsime: milline on Y oodatav väärtus ja milline on tema mõõtemääramatus?

Näide 1 (algus). Olgu meil mõõdetavateks suurusteks homogeenne metallkera diameeter D (üksikmõõtmise tulemus d) ja mass M (üksikmõõtmise tulemus μ (kasutame siin kreeka tähte, et mitte segadust tekitada keskväärtuse tähisega m)) ning olgu tarvis leida metalli tihedus ρ valemist

$$\rho = \frac{M}{\text{ruumala}} = \frac{6 M}{\pi D^3}. \quad (5.1)$$

Selles näites on $K = 2$, $X_1 = D$, $X_2 = M$ ja $Y = \rho$.

Kera diameeter olgu mõõdetud $N = 10$ korda nihikuga, mille põhiviga $\Delta_o = 0,05$ mm.

Diameetri keskväärtuseks saime

$$\bar{d}_N = \frac{1}{10}(d_1 + d_2 + \dots + d_{10}) = 20,170 \text{ mm}.$$

Diameetri A-tüüpi mõõtemääramatuseks saime

$$u_A(D) = \sqrt{\frac{(d_1 - \bar{d}_N)^2 + \dots + (d_{10} - \bar{d}_N)^2}{10 \cdot (10 - 1)}} = 0,022 \text{ mm},$$

ning diameetri B -tüüpi mõõtemääramatus on

$$u_B(D) = \Delta_o / \sqrt{3} = 0,017 \text{ mm}.$$

Siit summaarne diameetri mõõtemääramatus katteteguriga $k = 2$ (s.o usaldusnivooga $p = 95\%$) on

$$u(D) = 2 \cdot \sqrt{(u_A(D))^2 + (u_B(D))^2} = 2 \cdot \sqrt{(0,022)^2 + (0,017)^2} = 0,056 \text{ mm}.$$

Massi kaalusime ühekordselt neljanda klassi kaaludega. Mass osutus võrdseks järgmiste vihtide masside summaga

$$\mu = (20 + 2 + 2 + 0,1 + 0,05) \text{ g} = 24,15 \text{ g}.$$

Massi määramise põhiviga liitub kaalude põhiveast 50 mg ja vihtide põhivigadest, mis neljanda klassi vihtide puhul on (vt lisa 2) 20, 6, 6, 1 ja 1 mg. Seega saame massi põhiveaks

$$\Delta_o(M) = \sqrt{50^2 + 20^2 + 6^2 + 6^2 + 1^2 + 1^2} = 54,5 \text{ mg}$$

ning B-tüüpi määramatuseks usaldusnivool 95 % $u_B(M) = 2 \cdot \Delta_o(M) / \sqrt{3}$. Kuna kordsed massi mõõtmised annaksid siin kogu aeg ühe ja sama tulemuse, siis loeme massi A-tüüpi mõõtemääramatuse nulliks ning saame

$$u(M) = u_B(M) = \frac{2 \cdot \Delta_o(M)}{\sqrt{3}} = 63 \text{ mg} = 0,063 \text{ g}.$$

Kuidas ei tohi väljundsuurust arvutada. Kui prooviksime siin arvutada erinevatele mõõtmistele vastavad tiheduse väärtused lähtudes üldvalemist (5.1), s.o i -nda mõõtmise korral leiaksime suuruse

$$\rho_i = \frac{6}{\pi} \frac{\mu_i}{(d_i)^3}$$

ja seejärel leiaksime üksiktiheduste ρ_i aritmeetilise keskmise ning empiirilise standardhälbe (tiheduse A-tüüpi mõõtemääramatuse iseloomustajana), siis läheks suur osa massi määramisega seotud mõõtemääramatusest lihtsalt kaotsi. Sellist viga aga ei tohi teha.

Seepärast talitatakse siin teisiti. Järgnevas vaatame esmalt üldjuhtu ja siis tuleme uuesti kera tiheduse määramise ülesande juurde tagasi.

Mõõtemääramatuste liitumine üldise funktsionaalse seose korral.

Eeldame et:

Mõõtmisi on tehtud N korda ning meil on teada/arvutatud sisendsuuruste keskväärtused ning määramatused

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K, \\ u(X_1), u(X_2), \dots, u(X_K).$$

(Eespool toodud näites on määratud $\bar{x}_1 = \bar{d}_N$, $\bar{m}_N = m$ ning $u(D)$ ja $u(M)$.)

Teeme nüüd eelduse, et suuruste X_i üksikmõõtmiste hälbed $\delta x_i = x_i - \bar{x}_i$ on väikesed ja muudavad väljundsuuruse Y väärtust vähe. Sel juhul saame esitada **üksikmõõtmisele vastava** Y väärtuse punktis $\{x_i\}$ rittaarendusena punktis $\{\bar{x}_i\}$ hälvetele $\{\delta x_i\}$ järgi:

$$Y = Y(\bar{x}_1 + \delta x_1, \dots, \bar{x}_K + \delta x_K) \approx Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K) + \frac{\partial Y}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial Y}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial Y}{\partial x_K} \delta x_K = \\ = Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K) + \sum_{i=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \delta x_i,$$

ehk

$$Y = \bar{Y} + \delta Y, \tag{5.2}$$

kus

$$\bar{Y} = Y(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K) \quad \text{ja} \quad \delta Y = \sum_{i=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \delta x_i. \tag{5.3}$$

Siin \bar{Y} samastame suuruse Y mõõdetud/tõelise väärtusega ja hälbe δY samastame suuruse Y ühekordse mõõtmise mõõteveaga. Seetõttu saame Y mõõtemääramatuse arvutamiseks valemi

$$u^2(Y) = m[(\delta Y)^2], \tag{5.4}$$

kus $m[\]$ tähistab matemaatilist ootust nagu varemgi. Valem (5.4) eeldab, et hälbe δY keskvärtus on null:

$$m[\delta Y] = 0.$$

See eeldus on rangelt võttes täidetud vaid siis, kui

$$m[\delta x_i] = 0, \text{ s.o, kui } m[X_i] = \bar{x}_i. \quad (5.5)$$

Ligikaudu see nii ongi, ja sel juhul on (5.4) kasutamine õigustatud. Pannes δY avaldise (5.3) valemisse (5.4), saame

$$m[(\delta Y)^2] = m\left[\left(\sum_{i=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \delta x_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial x_j} m[\delta x_i \delta x_j].$$

(NB! Osatuletised $\partial Y / \partial x_i$ on arvatud fikseeritud punktis ja seetõttu nemad ei ole juhuslikud suurused, vaid kindlad/mittejuhuslikud arvud!) Kui mõõtevigade keskvärtused on nullid (nagu eeldab valem (5.5)), siis on viimane keskvärtus summa all kovariatsioon, mille saab korrelatsioonikordaja kasutamisel esitada (*kovariatsiooni* ja *korrelatsioonikordajat* vt punktis 4.4)

$$m[\delta x_i \cdot \delta x_j] = \text{cov}(\delta x_i, \delta x_j) = r_{ij} u(X_i)u(X_j),$$

kus oleme eeldanud, et juhusliku (mõõdetava) suuruse X_i standardhälve langeb kokku tema summaarse mõõtemääramatusega:

$$\sigma(X_i) = u(X_i). \quad (5.6)$$

Seega võime lõplikult kirjutada

$$u^2(Y) = \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial x_j} r_{ij} u(X_i)u(X_j)$$

ehk

$$u(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K \frac{\partial Y}{\partial x_i} \frac{\partial Y}{\partial x_j} r_{ij} u(X_i)u(X_j)}. \quad (5.7)$$

See on üldvalem mõõtmiste väljundsuuruse Y mõõtemääramatuse leidmiseks sisendsuuruste $\{X_i\}$ mõõtemääramatuste ja korrelatsioonide kaudu. Ta on hästi üldine ja kehtib matemaatilise/tõenäosusliku keskmise mõttes. Ainus koht, kus tasub alati enne hoolega mõelda, kui seda valemit rakendada, on eeldus standardhälbe ühtimisest mõõtemääramatusega (5.6). Iseküsimus on muidugi, kust leida korrelatsioonikordaja r_{ij} . Loetlen siin kolm olulisemat juhtu.

võime lugeda massi ja diameetri mõõtmised korreleerimatuteks: $r_{12} = r[D, M] = 0$. Niisiis kehtib siin arvutusvalem

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial D}\right)^2 u^2(D) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial M}\right)^2 u^2(M)}.$$

Valemist (5.1) järelduvad osatuletiste avaldised ja arväärtused

$$\frac{\partial \rho}{\partial D} = -\frac{18 M}{\pi D^4} = -8,36 \text{ g cm}^{-4}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial M} = \frac{6}{\pi D^3} = 0,233 \text{ cm}^{-3}.$$

Seepärast saame

$$u(\rho) = \sqrt{(8,36 \cdot 0,056)^2 + (0,233 \cdot 0,063)^2} = 0,47 \text{ g cm}^{-3}.$$

Näide 2. Olgu mõõdetud suurused x ja y ning väljundsuurus, mille väärtust tahame leida, olgu nende summa/vahe: $z = x \pm y$. Ning olgu need sisendsuurused korreleerimatud.

Kehtivad valemid

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \pm 1,$$

seetõttu

$$u(z) = \sqrt{1^2 \cdot u^2(x) + (\pm 1)^2 \cdot u^2(y)} = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$$

ehk ka kujul

$$u^2(z) = u^2(x) + u^2(y).$$

See on sisuliselt sõltumatute suuruste dispersioonide liitumise reegel. Siin võib sõnastada selle nii: kahe sõltumatu suuruse algebralise summa mõõtemääramatuse ruut on summeeritavate suuruste mõõtemääramatuste ruutude summa.

Näide 3. Olgu taas mõõdetud suurused x ja y korreleerimatud ning olgu väljundsuuruseks $z = x \cdot y$. Nüüd saame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

ning tulemuseks on

$$u^2(z) = y^2 u^2(x) + x^2 u^2(y).$$

See valem on mugavam kirjutada ümber suhtelistele mõõtemääramatustele kujul

$$\left(\frac{u(z)}{z}\right)^2 = \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2$$

ehk

$$\frac{u(z)}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}.$$

Täpselt samasugune valem kehtib ka jagatisele $z = x / y$ (kontrollida iseseisvalt). Seega korrutamisel ja jagamisel suhtelise mõõtemääramatuse ruut on tegurite (*resp.* jagatava ja jagaja) suhteliste mõõtemääramatuste ruutude summa.

Eelneva kahe näite varal võime sõnastada reegli: **mõõdetavate suuruste summeerimisel** (sisaldab ka lahutamise võimalust) **liituvad absoluutsete mõõtemääramatuste ruudud, korrutamisel ja jagamisel aga liituvad suhteliste mõõtemääramatuste ruudud.**

Matemaatiliselt on see reegel suvalisele arvule $(j + k)$ sisendsuurusele sõnastatav järgmiselt.

A. Olgu väljundsuurus

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_j - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k),$$

kus X_i, Y_l on sisendsuurused. Siis Z **absoluutne mõõtemääramatus** on

$$\begin{aligned} u(Z) &= \\ &= \sqrt{u^2(X_1) + u^2(X_2) + \dots + u^2(X_j) + u^2(Y_1) + u^2(Y_2) + \dots + u^2(Y_k)}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

B. Olgu väljundsuurus

$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_j}{Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_k},$$

siis Z **suhteline mõõtemääramatus** on

$$\begin{aligned} \frac{u(Z)}{|Z|} &= \\ &= \sqrt{\frac{u^2(X_1)}{(\bar{x}_1)^2} + \frac{u^2(X_2)}{(\bar{x}_2)^2} + \dots + \frac{u^2(X_j)}{(\bar{x}_j)^2} + \frac{u^2(Y_1)}{(\bar{y}_1)^2} + \frac{u^2(Y_2)}{(\bar{y}_2)^2} + \dots + \frac{u^2(Y_k)}{(\bar{y}_k)^2}}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

kus $\{\bar{x}_i\}, \{\bar{y}_l\}$ ja Z on sisendsuuruste mõõdetud väärtused ja väljundsuuruse arvatud väärtus.

Näide 4. Pöördume tagasi üldvalemi (5.7) juurde. Olgu meil vaja määrata vahelduvvoolu keskmine võimsus. Selleks tuleb ampermeetriga mõõta vahelduvvoolu- ja voltmeetriga vahelduvpinge efektiivväärtused (vastavalt I ja U) ning fasomeetriga voolu ja pinge vaheline faasinihe φ . Võimsuse saab arvutada valemist

$$P = I \cdot U \cdot \cos \varphi.$$

Liitmääramatus $u_c(P)$ on funktsioon suurustest U , I , φ , $u(U)$, $u(I)$ ja $u(\varphi)$:

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)^2 u^2(U) + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 u^2(I) + \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 u^2(\varphi) + 2\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)r_{U,I}u(U)u(I)}.$$

Et pinge ja voolu efektiivväärtused on teineteisest lineaarses sõltuvuses ($U = IR$), kus R on vooluahela takistus, mis fikseeritud sagedusel on konstant, siis korrelatsioonitegur $r[U, I] = 1$.

Seetõttu juurealuse avaldise arvutus annab

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)^2 u^2(U) + \left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 u^2(I) + \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2 u^2(\varphi) + 2\left(\frac{\partial P}{\partial U}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)r_{U,I}u(U)u(I) = \\ & = I^2 \cos^2(\varphi)u^2(U) + U^2 \cos^2(\varphi)u^2(I) + \\ & + U^2 I^2 (-\sin(\varphi))^2 u^2(\varphi) + 2IU \cos^2(\varphi)u(U)u(I) = \\ & = (I \cos(\varphi)u(U) + U \cos(\varphi)u(I))^2 + U^2 I^2 \sin^2(\varphi)u^2(\varphi). \end{aligned}$$

Seega

$$u(P) = \sqrt{(I \cos(\varphi)u(U) + U \cos(\varphi)u(I))^2 + U^2 I^2 \sin^2(\varphi)u^2(\varphi)}.$$

Oletame nüüd, et mõõtsime voolutugevuse väärtuseks $I = 0,1$ A (ampermeetri täpsusklass $\gamma = 0,2$, mõõtediapasoon 0,15 A), pinge väärtuseks $U = 100$ V (voltmeetri täpsusklass $\gamma = 0,2$; mõõtediapasoon 150 V) ja faasiks $\varphi = \pi/3$ (fasomeetri täpsusklass $\delta = 0,6$). Vastavad määramatused avalduvad nüüd:

$$u_B(I) = \frac{0,0003}{\sqrt{3}} \text{ A}; u_B(U) = \frac{0,3}{\sqrt{3}} \text{ V} \text{ ja } u_B(\varphi) = \frac{0,0063}{\sqrt{3}} \text{ rad}.$$

Arvandmete asendamisel keskmise võimsuse ja tema määramatuse valemitesse saame

$$P = 0,1 \cdot 100 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 5 \text{ W},$$

$$u(P) =$$

$$\begin{aligned} & = \sqrt{\left(0,1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{0,3}{\sqrt{3}} + 100 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{0,0003}{\sqrt{3}}\right)^2 + 100^2 0,1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{0,0063}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ & = 0,036 \text{ W}. \end{aligned}$$

Tulemuse esitame kujul $P = 5,000(36) \text{ W}$.

5.6. Halvima olukorra meetod

Mõnikord kasutatakse ka lihtsamat meetodit kaudmõõtmise määramatuse hindamiseks, nn **halvima olukorra meetodit**. “Halvimaks” nimetatakse olukorda, kus kõik mõõtehälbed mõjustavad määratavat suurust ühes suunas, näiteks vähendavad minimaalset suurust y . Nii võib hinnata kaudmõõdetud suuruse y väärtuse alampiiri y^- ja ülempiiri y^+ . Selleks tuleb iga argumendi jaoks eraldi välja selgitada, kas y vähendamiseks tuleb argumenti x suurendada või vähendada. Kui on nõutav argumendi suurendamine, siis pannakse suuruse y arvutusvalemisse argumendi x asemele $x + u_C(x)$, kui argumenti on vaja vähendada, siis $x - u_C(x)$. Selliselt toimime kõikide argumentidega ja arvutame välja y^- ja y^+ . Otsitava määramatuse jaoks saame kaks väärtust $u_C^-(y) = y - y^-$ ja $u_C^+(y) = y^+ - y$.

Toome siin halvima olukorra määramatuse hinnangud kahel tähtsamal erijuhul: **(A)** väljundsuurus on sisendsuuruste algebraline summa ja **(B)** väljundsuurus on sisendsuuruste korrutis ja jagatis.

A. Olgu väljundsuurus

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_j - (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k),$$

kus X_i, Y_l on sisendsuurused. Siis halvima olukorra hinnang on **mõõtemääramatustele**

$$u(Z) \leq u(X_1) + u(X_2) + \dots + u(X_j) + u(Y_1) + u(Y_2) + \dots + u(Y_k). \quad (6.1)$$

B. Olgu väljundsuurus

$$Z = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_j}{Y_1 \cdot Y_2 \cdot \dots \cdot Y_k},$$

siis halvima olukorra hinnang on **suhtelistele mõõtemääramatustele**

$$\frac{u(Z)}{|Z|} \leq \frac{u(X_1)}{|x_1|} + \frac{u(X_2)}{|x_2|} + \dots + \frac{u(X_j)}{|x_j|} + \frac{u(Y_1)}{|y_1|} + \frac{u(Y_2)}{|y_2|} + \dots + \frac{u(Y_k)}{|y_k|}. \quad (6.2)$$

kus $\{\bar{x}_i\}, \{\bar{y}_l\}$ ja Z on sisendsuuruste mõõdetud väärtused ja väljundsuuruse arvutatud väärtus.

“Halvima olukorra meetod” on suhteliselt lihtne, aga tal on ka tõsine puudus. Nimelt ta **tõstab põhjendamatu usaldusnivood, s.t me hindame määramatust üle**. Kui ei ole spetsiaalselt vaja määramatust üle hinnata, siis “halvima olukorra meetodit” me ei kasuta. Kui aga eksisteerib oht, et argumentide määramatused pole täiesti sõltumatud või kui ei tohi määramatust kindlasti alla hinnata, siis tuleb kasutada “halvima olukorra meetodit”.

5.7. Kaalitud keskmiste meetod

Praktikas määratakse sageli üht ja sama füüsikalist suurust erinevatel tingimustel või erinevate meetoditega, kusjuures üksiktulemuste määramatused osutuvad erinevateks. On selge, et keskmise tulemuse arvutamisel tuleks täpsemaid tulemusi arvestada suurema kaaluga kui vähemtäpseid. Võimaluse selleks pakub kaalitud keskmiste meetod.

Sellisel juhul ei arvutata mitte tulemuste aritmeetilist keskmist, vaid leitakse nn **kaalitud keskmine**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (7.1)$$

kus g_i on i -nda tulemuse kaal ja n on mõõtmiste arv. Kaaludeks g_i võetakse arvud, mis on võrdelised üksikmõõtmiste määramatuste ruutude pöördväärtustega. Võrdetegur võib olla suvaline, tavaliselt võetakse ta võrdseks ühega. Sel juhul

$$g_i = \frac{1}{u_c^2(x_i)}. \quad (7.2)$$

Kaalitud keskmise määramatuse leiame valemist

$$u_c(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n g_i}}. \quad (7.3)$$

Kaalitud keskmine osutub alati täpsemaks kui ka kõige täpsem üksiktulemus x_i .

Näide: Olgu kahe erineva meetodi abil leitud ühe ja sama suuruse väärtused

$$x_1 = 4,60 (0,10)$$

$$x_2 = 4,80 (0,20)$$

Arvutame

$$g_1 = \frac{1}{0,1^2} = 100 \text{ ja } g_2 = \frac{1}{0,2^2} = 25$$

$$\bar{x} = \frac{100 \cdot 4,6 + 25 \cdot 4,8}{100 + 25} = 4,640$$

$$u_c(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{100 + 25}} = 0,089$$

Lõpptulemuseks saime $\bar{x} = 4,640(0,089)$.

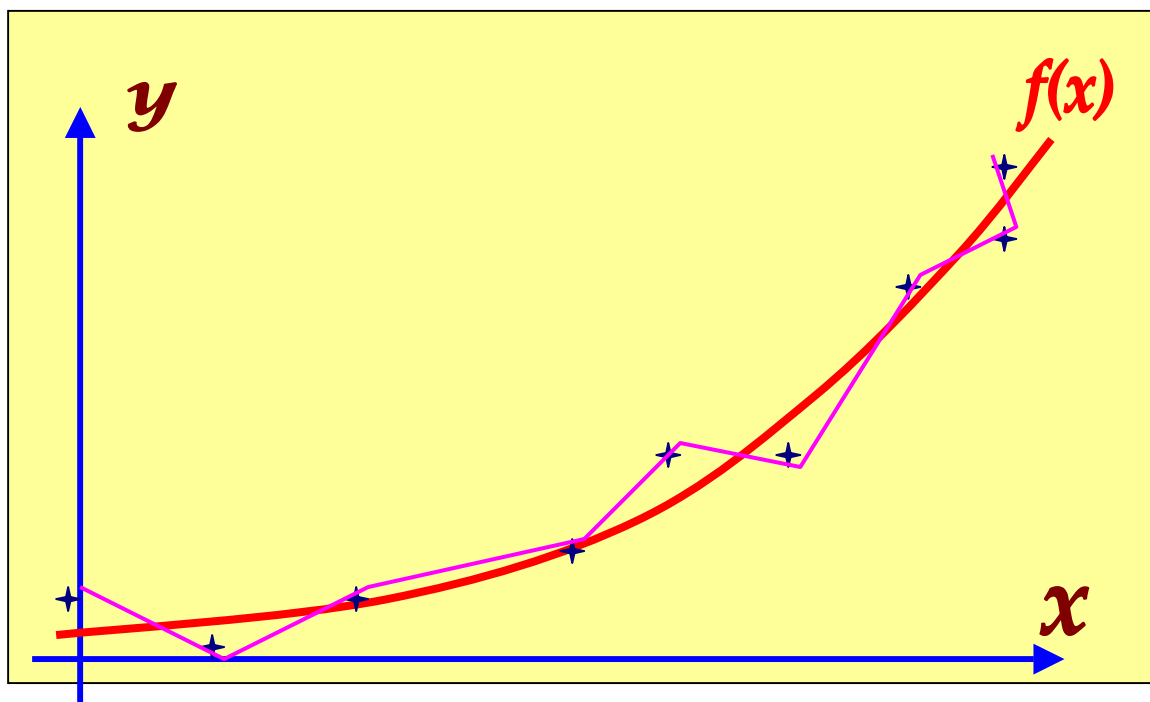
Nagu näha, ei mõjasta vähemtäpsete andmete lisamine mõõtmistulemust oluliselt. Aritmeetiline keskmine oleks märksa halvem hinnang kui täpsem tulemus üksinda.

5.8. Mõõtmistulemuste graafiline töötlemine. Vähimruutude meetod

Katsetes kasutatakse sageli suuruste x ja y paare, kusjuures üks neist, näiteks y , osutub teise, näiteks x -i, funktsiooniks. Seejärel kantakse leitud suurused graafikule ja püütakse leida sile joon, mis läheks katsepunktidest võimalikult lähedalt läbi ja kirjeldaks funktsiooni

$$y = f(x)$$

kõige paremini (täpsemalt, optimaalsemalt). Oleks vale nõuda, et joon läheks läbi kõikide mõõdetud punktide. Niisuguse siksakilise graafiku ehitamine oleks tegelikult jäme viga, sest on ette teada, et mõõtmisvigade tõttu punktid ei paikne reeglina mitte graafikul, vaid selle läheduses (joonis 8.1).



Joonis 8.1

Kõige korrektsem meetod selle funktsiooni f leidmiseks on *vähimruutude meetod*.

Vaatleme vähimruutude meetodit kõige lihtsama näite – lineaarse sõltuvuse

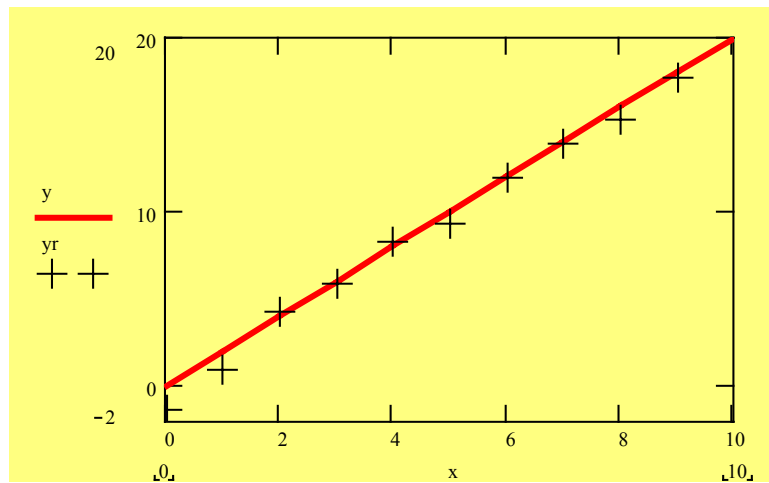
$$y = ax + b \quad (8.1)$$

korral. Olgu meil mõõdetud N arvupaari $\{x_i, y_i\}$, millest teame, et mõõtmisvigade puudumisel nad paikneksid sirgel $y = ax + b$. Ülesanne seisneb parameetrite a ja b ning nende määramatuste leidmises. Vähimruutude meetodil saadakse sirge tõusu a ja algordinaadi b sellised väärtused, mille puhul summa

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2 \quad (8.2)$$

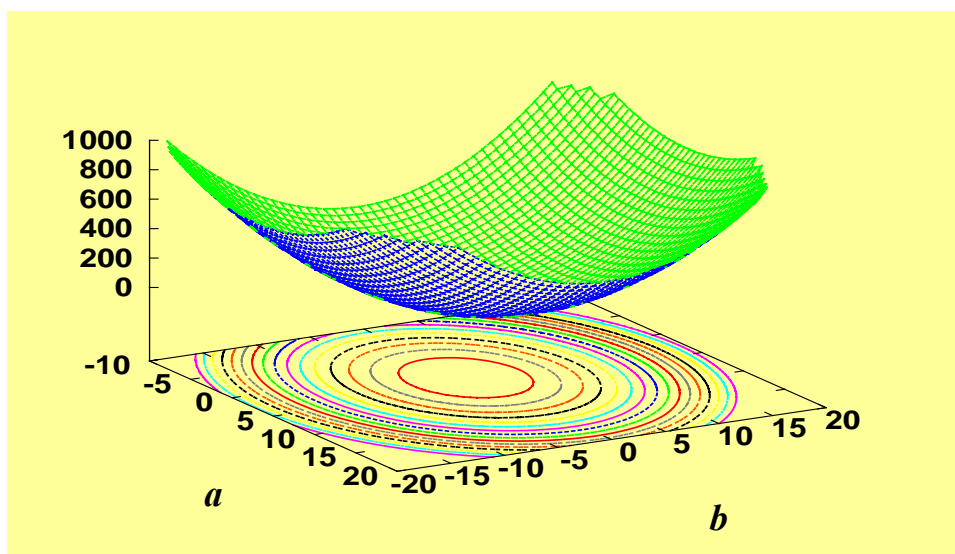
oleks minimaalne. S kujutab endast kahe muutuja a ja b funktsiooni (arvupaarid $\{x_i, y_i\}$ selles summas on etteantud arvud ja nendega me ei mängi/neid me ei muuda). Kui mõõdetud punktid paikneksid täpselt sirgel (8.1), siis oleks igas punktis $y_i - ax_i - b = 0$ ja summa (8.2) muutuks samaselt nulliks. Mõõtmisvigade tõttu aga mõõtepunktid täpselt ühelgi sirgel ei paikne ja ümarsulgudes olevad avaldised (8.2) paremal poolel nulliks ei saa, ükskõik kui osavalt me ka sirge parameetreid ei valiks.

Joonisel 8.2 on näidatud illustatsioonina sirge parameetritega $a = 2, b = 0$ ja ristikestega on toodud sama sirge mõõtmised kümnes punktis. Vead on modelleeritud nii x -ile kui y -le ühtlaselt jaotatuna intervallis $[-0,5, 0,5]$ (kogu modelleerimine on läbi viidud *Mathcad* keskkonnas).



Joonis 8.2

Üldiselt on valemiga (8.2) määratud $S(a, b)$ positiivne kõikjal (kõigi a ja b väärtuste korral) ja tal on parajasti üks miinimum (joonis 8.3), mille asend sõltub mõõdetud suurustest $\{x_i, y_i\}$.



Joonis 8.3

Miimumi tingimuse kohaselt peavad summa S osatuletised a ja b järgi olema võrdsed nulliga.

Arvutame S esimesed osatuletised:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)x_i = 2N[-\overline{xy} + a\overline{x^2} + b\overline{x}]$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b) = 2N[-\overline{y} + a\overline{x} + b]$$

kus on kasutatud aritmeetilise keskmise tähist

$$\overline{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i.$$

Esimeste tuletiste üheaegne nulliks muutumine annab võrrandisüsteemi miinimumpunkti koordinaatide a ja b leidmiseks:

$$\begin{aligned} a\overline{x^2} + b\overline{x} &= \overline{xy}, \\ a\overline{x} + b &= \overline{y}. \end{aligned}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendame asendusmeetodil: leiame esmalt teisest võrrandist b suuruse a funktsioonina: $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Selle tulemuse paneme esimesse võrrandisse, mis annab

$$a[\overline{x^2} - (\overline{x})^2] = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Seega saab lahendi nüüd kirjutada kujul

$$\begin{cases} a = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \\ b = \overline{y} - a\overline{x}. \end{cases}$$

Sama tulemuse võib alternatiivelt esitada ka nii:

$$\begin{cases} a = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})y_i}{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{x})^2}, \\ b = \overline{y} - a\overline{x}. \end{cases}$$

Suuruste a ja b standardhälbed avalduvad valemitega (toome ilma tõestuseta):

$$\left\{ \begin{array}{l} s(a) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{(N-2)\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \\ s(b) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}{N(N-2)\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}} \end{array} \right. ,$$

kus $d_i = y_i - ax_i - b$.

Lõplikult saame suuruste a ja b määramatud usaldusnivool p hinnata seostest:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(a, p) = t_{N-2}(p)s(a), \\ u(b, p) = t_{N-2}(p)s(b). \end{array} \right.$$

Saadavat sirget $y = ax + b$ konkreetsete, vähimruutude meetodist leitud parameetritega a ja b nimetatakse **regressioonisirgeks**.

Erijuhul peab regressioonisirge läbima koordinaatide alguspunkti. Sel juhul on sirge võrrand $y = ax$. Regressioonisirge tõus ja tõusu määramatus avalduvad nüüd valemist

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad , \\ u(p) = t_{N-2}(p) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{(N-1)\sum_{i=1}^N x_i^2}} \end{array} \right.$$

Arvutiprogrammides on sama ülesanne lahendatud ka keerulisemate juhtude jaoks. Nii näiteks võimaldab tabelarvutuse programm Excel läbi katsepunktide parve tõmmata kas eksponentsiaalse, logaritmilise või astmefunktsiooni kõvera või kuni 6. järku polünoomi. MathCAD pakub kõvera tüüpide valikul veelgi laiemaid võimalusi. Seejuures peab eksperimentaator kindlustama, et läbi katsepunktide tõmmatud kõver oleks **füüsikaliselt põhjendatud**. Kõrget järku polünoomide kasutamisel, eriti veel siis kui katsepunkte on vähe, kipuvad kõveratele sisse tulema sellised jõnksud, mis füüsikaliselt ei ole põhjendatud. Seetõttu tuleb väga kriitiliselt suhtuda arvuti poolt väljastatava kõvera kujusse ja vajadusel joonistada kõver ise käsitsi arvuti ekraanil. Füüsika praktikumi tööde vormistamisel võiks aja kokkuhoiu

mõttes soovitada ainult katsepunktide väljatrükkimist koos määramatuse ristidega. Määramatuse ristid või vearistid on kaks ristuvat lõiku graafikul katsepunkti asukohas, mis näitavad, kui suur on vastavas punktis vastavalt x - ja y -teljele kantud suuruse määramatused. Sobiva kõvera läbi katsepunktide võib hiljem ise käsitsi joonistada.

Tihti tuleb graafiliselt kontrollida teatavaid teoreetiliselt tuletatud sõltuvusi. Sel puhul kantakse graafikule eksperimendist saadud punktid koos määramatuse ristidega. Samale graafikule kantakse ka teoreetiliselt arvutatud kõver, ilma üksikuid katsepunkte näitamata. Teoreetilise kõvera kokkulangemine eksperimendi punktidega määramatuse ristide täpsusega kinnitab eksperimendi kooskõla teooriaga. Siinkohal tuleks märkida, et täiesti lubamatu on eksperimendist saadud katsepunktide suvaline nihutamine graafikul. Katsepunktid on konkreetsete mõõteriistadega ja fikseeritud ilmastiku jne tingimustes saadud mõõtmistulemused. Seetõttu tuleb nad graafikule kanda täpselt sellisel kujul, nagu nende väärtused katses määrati. Läbi katsepunktide joonistatav kõver on eksperimentaatori interpretatsioon mõõdetud füüsikalise suuruse käitumise kohta. Siin on eksperimentaatoril palju suurem vabadus. Ainukeseks piiranguks on, et eksperimentaator oskaks oma seisukohta veenvalt põhjendada.

6. ÖPPEKIRJANDUST

Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika kohta:

1. Tiit E, 1968: Tõenäosusteooria I. Loengukonspekt. Tartu, TRÜ Rotaprint, 319 lk.
2. Tiit E., A. Parring, T. Möls, 1977: Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika [õpik TRÜ matemaatikateaduskonnas]. Tallinn, Valgus, 470 lk.
3. Gurski J, 1986: Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemendid. Tallinn, Valgus, 311 lk.
4. Jõgi A, 2000: Tõenäosusteooria, 1. osa. TTÜ Kirjastus, Tallinn, lk 1–198.
5. Jõgi A, 2000: Tõenäosusteooria, 2. osa. TTÜ Kirjastus, Tallinn, lk 199–416.

Mõõtmiste, mõõtevigade ja mõõtemääramatuste kohta:

6. Tammet H, 1971: Füüsika praktikum, Metroloogia. Tln, 240 lk.
7. Voolaid H, 1986: Mõõtevigade hindamine füüsika praktikumis. Tartu, 56 lk.
8. Sena L, 1985: Füüsikaliste suuruste mõõtühikud ja nende dimensioonid, Tln, 224 lk.
9. Laaneots, R., Mathiesen, O., 2002: Mõõtmise alused. TTÜ Kirjastus, Tallinn, 206 lk.
10. Taylor J. R., 1997: Error Analysis. University Science Books, Sausalito, California, 327 pp.
11. US National Institute of Standards and Technology's web site
<http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html>

Lisa 1. Studenti t -kordaja

Studenti t -kordaja väärtused $t_{\nu}(p)$ sõltuvalt vabadusastmete arvust $\nu = N - 1$
ja soovitatavast usaldusnivoost p

Vabadusastmete arv $\nu = N - 1$	Osa p protsentides					
	68,27 ^(I)	90	95	95,45 ^(I)	99	99,73 ^(I)
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

(I) Suuruse x jaoks, mida kirjeldab normaaljaotus keskvaertusega \bar{x} ja standardhälbega σ_x , sisaldab vahemik $\bar{x} \pm k\sigma_x$ $p = 68,27; 95,45$ ja $99,73$ protsenti jaotusest vastavalt $k = 1; 2$ ja 3 korral.

Lisa 2. Vihtide lubatud vead

Tavaliste vihtide lubatud vead milligrammides [mg] (GOST 7328-65 järgi)

<i>m</i>	1. kl.	2. kl.	3. kl.	4. kl.	5. kl.
20 kg	–	–	160	1600	–
10 kg	–	16	80	800	8000
5 kg	–	8	40	400	4000
2 kg	–	3	16	160	1600
1 kg	–	2,5	12	120	1200
500 g	0,32	1,6	8	80	800
200 g	0,24	1,2	6	60	600
100 g	0,16	0,8	4	40	400
50 g	0,12	0,6	3	30	300
20 g	0,08	0,4	2	20	200
10 g	0,05	0,25	1,2	12	120
5 g	0,03	0,16	0,8	8	80
2 g	0,025	0,12	0,6	6	–
1 g	0,015	0,08	0,4	4	–
500 mg	0,010	0,06	0,3	3	–
200 mg	0,008	0,04	0,2	2	–
1...100 mg	0,005	0,02	0,1	1 (vt *)	–

*) 1 ja 2 mg raskusi vihte ei valmistata

Uute 3., 4. ja 5. klassi gramm- ning kilogrammvihtide viga ei tohi olla negatiivne.